MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 2

Penyelesaian Persamaan Satu Variabel

Solutions of Equations in One Variable

Halaman buku 47 – 101 • 7 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Bab ini membahas masalah mencari akar $f(x) = 0$. Metode bisection selalu konvergen asalkan ada perubahan tanda, tetapi lambat (linear). Iterasi titik tetap mengubah masalah menjadi $x = g(x)$ dan konvergen bila g kontraksi.

Metode Newton dan secant jauh lebih cepat di dekat akar (orde 2 dan sekitar 1,618), tetapi membutuhkan tebakan awal yang baik. Analisis galat memperlihatkan hubungan antara orde konvergensi dan banyaknya iterasi. Percepatan Aitken dan metode Müller melengkapi alat untuk akar polinomial, termasuk akar kompleks.

Tujuan Pembelajaran

1. Menjalankan bisection, titik tetap, Newton, secant, dan false position dengan tangan dan program.
2. Menentukan syarat konvergensi iterasi titik tetap dan membandingkan orde konvergensi.
3. Menaksir banyak iterasi yang diperlukan untuk toleransi tertentu.
4. Mengenali akar berganda dan cara mempercepat konvergensi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
2.1	The Bisection Method	48	Teo. 2.1; 2 contoh
2.2	Fixed-Point Iteration	56	Def. 2.2; Teo. 2.3; Teo. 2.4 (Fixed-Point Theorem); Kor. 2.5; 3 contoh
2.3	Newton's Method and Its Extensions	67	Teo. 2.6; 4 contoh
2.4	Error Analysis for Iterative Methods	79	Def. 2.7; Teo. 2.8; Teo. 2.9; Def. 2.10; Teo. 2.11; Teo. 2.12; 3 contoh
2.5	Accelerating Convergence	86	Def. 2.13; Teo. 2.14; Teo. 2.15; 1 contoh
2.6	Zeros of Polynomials and Müller's Method	91	Teo. 2.16 (Fundamental Theorem of Algebra); Kor. 2.17; Kor. 2.18; Teo. 2.19 (Horner’s Method); Teo. 2.20; 3 contoh
2.7	Survey of Methods and Software	101	–

Rumus dan Metode Kunci

Bisection: batas galat

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Iterasi titik tetap dan batas galat ($|g'| \leq k < 1$)

$$p_n = g(p_{n-1}), \qquad |p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|p_1 - p_0|$$

Metode Newton

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Metode secant

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})\,(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

Orde konvergensi α

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda$$

Percepatan Aitken Δ^2

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$

2.1 The Bisection Method

Rujukan buku: halaman 48

Metode bisection (bagi dua) adalah cara paling dasar untuk mencari akar persamaan $f(x) = 0$. Idenya berasal dari teorema nilai antara: jika f kontinu pada $[a, b]$ dan $f(a)$ serta $f(b)$ berbeda tanda, maka paling sedikit ada satu akar di dalam (a, b). Selang itu lalu dibagi dua berulang kali, dan setiap kali kita menyimpan separuh selang yang masih mengapit perubahan tanda.

Pada setiap langkah, titik tengah $p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ dihitung dan dijadikan taksiran akar. Bila $f(p_n) = 0$ kita selesai. Bila tidak, tanda $f(p_n)$ dibandingkan dengan tanda $f(a_n)$: jika sama, akar berada di sebelah kanan sehingga $a_{n+1} = p_n$; jika berbeda, akar berada di sebelah kiri sehingga $b_{n+1} = p_n$. Lebar selang mengecil setengahnya pada setiap iterasi.

Kekuatan metode ini adalah kepastiannya: selama syarat awal (kontinu dan beda tanda) terpenuhi, metode selalu konvergen, dan batas galatnya diketahui sebelum perhitungan dimulai. Kelemahannya adalah lajunya yang lambat (linear): kira-kira dibutuhkan 3,3 iterasi untuk menambah satu angka desimal ketelitian. Karena itu bisection sering dipakai sebagai tahap awal untuk mendapatkan tebakan yang baik bagi metode yang lebih cepat seperti Newton.

Hal praktis yang perlu diingat: menghitung titik tengah sebagai $a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$ lebih aman daripada $\frac{a_n + b_n}{2}$ karena mengurangi risiko luapan angka. Menguji tanda dengan $\operatorname{sign}(f(a)) \cdot \operatorname{sign}(f(p))$ juga lebih aman daripada mengalikan nilai fungsi, yang bisa luap atau habis (underflow).

Konsep kunci

Teorema nilai antara — Fungsi kontinu pada $[a, b]$ dengan $f(a)f(b) < 0$ pasti memiliki akar di (a, b). Inilah jaminan teoretis bagi seluruh metode.

Selang pengapit — Selang $[a_n, b_n]$ yang di kedua ujungnya f berbeda tanda. Setiap iterasi mempertahankan sifat ini sambil memperkecil lebarnya.

Kriteria berhenti — Iterasi dihentikan jika $|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$, atau $|f(p_n)| < \varepsilon$, atau $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon$, atau jumlah iterasi maksimum tercapai. Kriteria berbeda bisa memberi hasil berbeda.

Batas galat apriori — Setelah n iterasi, $|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n}$, sehingga banyak iterasi untuk toleransi ε dapat dihitung sebelum mulai.

Konvergensi linear — Galat berkurang kira-kira separuh tiap iterasi. Laju ini pasti tetapi lambat dibanding Newton atau secant.

Galat tidak monoton — Selang selalu mengecil, tetapi galat $|p_n - p|$ sebenarnya tidak selalu mengecil dari satu iterasi ke iterasi berikutnya; hanya batasnya yang menurun secara teratur.

Titik tengah

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

Batas galat

$$|p_n - p| \le \frac{b-a}{2^n}$$

Web by: Steven Paulus Siahaan

Banyak iterasi untuk toleransi ε

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Aturan pembaruan selang

$$f(a_n)f(p_n) > 0 \;\Rightarrow\; a_{n+1} = p_n,\; b_{n+1} = b_n; \qquad f(a_n)f(p_n) < 0 \;\Rightarrow\; a_{n+1} = a_n,\; b_{n+1} = p_n$$

Algoritma: Bisection

1. Masukkan a, b, toleransi ε, dan batas iterasi N. Pastikan $f(a)f(b) < 0$.
2. Untuk $n = 1, 2, \ldots, N$: hitung $p = a + \frac{b-a}{2}$ dan $f(p)$.
3. Jika $f(p) = 0$ atau $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$, keluarkan p sebagai hasil dan berhenti.
4. Jika $f(a)f(p) > 0$ ganti a dengan p; jika tidak, ganti b dengan p.
5. Bila N iterasi habis tanpa memenuhi kriteria, laporkan bahwa metode gagal mencapai toleransi.

Contoh 1: Akar $f(x) = x^3 - x - 2$ pada $[1, 2]$

Tentukan hampiran akar $f(x) = x^3 - x - 2$ pada selang $[1, 2]$ dengan tujuh iterasi bisection. Karena $f(1) = -2 < 0$ dan $f(2) = 4 > 0$, ada akar di dalam selang.

Penyelesaian.

Hasil tiap iterasi (akar sebenarnya sekitar $1{,}5214$):

$n = 1$: $p = 1{,}5$, $f(p) = -0{,}1250$, maka $a = 1{,}5$.

$n = 2$: $p = 1{,}75$, $f(p) = +1{,}6094$, maka $b = 1{,}75$.

$n = 3$: $p = 1{,}625$, $f(p) = +0{,}6660$, maka $b = 1{,}625$.

$n = 4$: $p = 1{,}5625$, $f(p) = +0{,}2522$, maka $b = 1{,}5625$.

$n = 5$: $p = 1{,}53125$, $f(p) = +0{,}0591$, maka $b = 1{,}53125$.

$n = 6$: $p = 1{,}51563$, $f(p) = -0{,}0341$, maka $a = 1{,}51563$.

$n = 7$: $p = 1{,}52344$, $f(p) = +0{,}0123$.

Setelah tujuh iterasi selang menjadi $[1{,}51563;\ 1{,}53125]$ dengan lebar $\frac{1}{2^7} = 0{,}0078$, dan taksiran terbaik $p_7 = 1{,}52344$ memiliki galat sebenarnya sekitar $0{,}0020$, di bawah batas $0{,}0078$.

Contoh 2: Banyak iterasi yang diperlukan

Berapa iterasi bisection yang menjamin galat kurang dari 10^{-4} pada selang $[0, 1]$?

Penyelesaian.

Gunakan batas galat $\frac{b-a}{2^n} < 10^{-4}$ dengan $b - a = 1$:

$$2^n > 10^4 \;\Rightarrow\; n > \log_2 10^4 = \frac{4}{\log_{10} 2} \approx 13{,}29$$

Jadi diperlukan $n = 14$ iterasi, apa pun fungsinya (selama syarat metode terpenuhi).

Kesalahan umum

• Menjalankan metode tanpa memeriksa $f(a)f(b) < 0$. Jika kedua ujung bertanda sama, tidak ada jaminan akar di selang itu (bisa genap banyaknya akar atau tidak ada sama sekali).

• Mengira batas $\frac{b-a}{2^n}$ adalah galat sebenarnya. Itu hanya batas atas; galat sebenarnya bisa jauh lebih kecil, bahkan nol bila tebakan kebetulan tepat.

• Memakai selang yang memuat akar ganda berkelipatan genap, misalnya $f(x) = (x-1)^2$. Fungsi tidak berganti tanda sehingga metode tidak dapat dimulai.

• Menghentikan iterasi hanya dengan $|f(p_n)|$ kecil. Fungsi yang sangat datar di dekat akar dapat memiliki $|f|$ kecil padahal p_n masih jauh dari akar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa bisection selalu konvergen tetapi metode Newton tidak? Apa harga yang dibayar untuk kepastian itu?
2. Jika f memiliki tiga akar di dalam $[a, b]$ dan $f(a)f(b) < 0$, akar yang mana yang akan ditemukan bisection? Apakah bisa diprediksi?
3. Bagaimana Anda menggabungkan bisection dengan metode Newton agar diperoleh metode yang cepat sekaligus pasti konvergen?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tunjukkan bahwa $g(x) = x - \cos x$ memiliki akar di $[0, 1]$, lalu hitung p_1, p_2, p_3 dengan bisection.

Kunci: $g(0) = -1 < 0$, $g(1) \approx 0{,}4597 > 0$. $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}75$, $p_3 = 0{,}625$ (akar sebenarnya $\approx 0{,}7391$).

2. Berapa iterasi minimum agar galat $< 10^{-3}$ pada selang $[2, 2{,}5]$?

Kunci: $\frac{0{,}5}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow n > \log_2 500 \approx 8{,}97$, jadi $n = 9$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

2.2 Fixed-Point Iteration

Rujukan buku: halaman 56

Banyak persamaan $f(x)=0$ dapat ditulis ulang dalam bentuk $x=g(x)$. Bilangan p yang memenuhi $g(p)=p$ disebut titik tetap (fixed point) dari g: fungsi g memetakan p ke dirinya sendiri. Secara geometris, titik tetap adalah absis perpotongan grafik $y=g(x)$ dengan garis $y=x$. Masalah mencari akar dan mencari titik tetap ekuivalen: dari f kita dapat membuat $g(x)=x-f(x)$, atau $g(x)=x+c\,f(x)$ dengan $c\neq 0$, dan sebaliknya dari g kita dapat membuat $f(x)=x-g(x)$. Kebebasan memilih g inilah yang menjadi sumber kekuatan sekaligus kerumitan metode ini.

Pertanyaan pertama adalah apakah titik tetap ada dan tunggal. Teorema keberadaan dan ketunggalan menyatakan: jika g kontinu pada $[a,b]$ dan $g(x)\in[a,b]$ untuk semua $x\in[a,b]$, maka g memiliki paling sedikit satu titik tetap di $[a,b]$. Buktinya memakai teorema nilai antara pada $h(x)=g(x)-x$, yang bernilai ≥ 0 di a dan ≤ 0 di b. Bila di samping itu g' ada pada (a,b) dan terdapat konstanta $0<k<1$ dengan $|g'(x)|\leq k$ untuk semua $x\in(a,b)$, maka titik tetapnya tunggal. Alasannya: jika ada dua titik tetap $p\neq q$, teorema nilai rata-rata memberikan $|p-q|=|g(p)-g(q)|=|g'(\xi)||p-q|\leq k|p-q|<|p-q|$, sebuah kontradiksi.

Iterasi titik tetap (disebut juga iterasi fungsional atau metode Picard) sangat sederhana: pilih tebakan awal p_0 lalu hitung $p_n=g(p_{n-1})$ untuk $n=1,2,\ldots$. Jika barisan ini konvergen dan g kontinu, maka limitnya pasti titik tetap, sebab $p=\lim p_n=\lim g(p_{n-1})=g(p)$. Kontinuitas g di sinilah yang membuat limit dapat dipindahkan masuk ke dalam fungsi. Tetapi konvergensi tidak otomatis: barisan bisa menjauh dari titik tetap, berosilasi, atau berputar tanpa pernah mendekat.

Teorema titik tetap menjawab kapan konvergensi dijamin. Misalkan $g\in C[a,b]$, $g(x)\in[a,b]$ untuk semua $x\in[a,b]$, g' ada pada (a,b), dan $|g'(x)|\leq k<1$ di (a,b). Maka untuk setiap $p_0\in[a,b]$ barisan $p_n=g(p_{n-1})$ konvergen ke titik tetap tunggal $p\in[a,b]$. Buktinya satu baris: $|p_n-p|=|g(p_{n-1})-g(p)|=|g'(\xi_n)||p_{n-1}-p|\leq k|p_{n-1}-p|$, sehingga $|p_n-p|\leq k^n|p_0-p|\to 0$. Teorema ini memberi dua batas galat yang berguna:

$$|p_n-p|\leq k^n\max\{p_0-a,\ b-p_0\}\qquad\text{dan}\qquad |p_n-p|\leq \frac{k^n}{1-k}\,|p_1-p_0|.$$

Batas kedua praktis karena hanya memerlukan satu langkah iterasi dan taksiran k. Makin kecil k, makin cepat konvergensinya; bila k dekat 1, konvergensi sangat lambat. Dalam kenyataan, laju sebenarnya ditentukan oleh $|g'(p)|$ di titik tetap itu sendiri: galat berkurang kira-kira dengan faktor $|g'(p)|$ pada tiap langkah.

Satu persamaan dapat dibuat menjadi banyak bentuk $x=g(x)$, dan hanya sebagian yang baik. Contohnya, untuk $x^2-x-1=0$ kita dapat memakai $g(x)=1+\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2-1$, atau $g(x)=\sqrt{1+x}$. Ketiganya memiliki titik tetap yang sama (rasio emas), tetapi perilaku iterasinya berbeda total, seperti ditunjukkan pada contoh di bawah. Pelajaran praktisnya: pilih penulisan ulang yang menghasilkan $|g'(p)|$ sekecil mungkin, idealnya $g'(p)=0$. Gagasan itulah yang nanti mengarah ke metode Newton (Seksi 2.3) dan analisis orde konvergensi (Seksi 2.4).

Iterasi titik tetap memerlukan satu evaluasi g per iterasi dan tidak memerlukan turunan, sehingga murah dan mudah diprogram. Kelemahannya: syarat teorema hanya cukup (bukan perlu), selang $[a,b]$ yang tepat harus dicari, dan lajunya pada umumnya hanya linear. Metode ini juga adalah kerangka dasar bagi banyak metode lain, termasuk Newton dan iterasi pada sistem persamaan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Titik tetap — Bilangan p dengan $g(p) = p$; secara geometris perpotongan grafik $y = g(x)$ dengan garis $y = x$. Mencari akar $f(x) = 0$ dapat diubah menjadi mencari titik tetap $g(x) = x - f(x)$.

Syarat keberadaan — Jika g kontinu pada $[a, b]$ dan memetakan $[a, b]$ ke dalam dirinya, titik tetap pasti ada. Syarat \"memetakan ke dalam diri\" sering menjadi bagian yang paling perlu diperiksa.

Syarat ketunggalan dan kontraksi — Bila $|g'(x)| \le k < 1$ pada (a, b), titik tetap tunggal dan iterasi konvergen dari tebakan awal mana pun di $[a, b]$. Konstanta k mengukur seberapa kuat g \"menyusutkan\" jarak.

Iterasi titik tetap — Barisan $p_n = g(p_{n-1})$ dari tebakan awal p_0. Bila konvergen dan g kontinu, limitnya adalah titik tetap.

Batas galat — $|p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$. Dengan batas ini banyak iterasi untuk toleransi tertentu dapat ditaksir setelah satu langkah.

Pengaruh pilihan g — Persamaan yang sama dapat dituliskan sebagai banyak g berbeda; ada yang konvergen cepat, lambat, atau divergen. Penentunya terutama $|g'(p)|$.

Syarat cukup, bukan perlu — Jika syarat teorema gagal, iterasi masih mungkin konvergen. Teorema hanya menjamin, tidak melarang.

Iterasi titik tetap

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

Syarat kontraksi

$$|g'(x)| \le k < 1 \quad \text{untuk } x \in (a, b)$$

Batas galat apriori

$$|p_n - p| \le k^n \max\{p_0 - a,\ b - p_0\}$$

Batas galat memakai $p_1 - p_0$

$$|p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k}\,|p_1 - p_0|$$

Pengubahan akar menjadi titik tetap

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x), \quad g(x) = x - f(x)$$

Algoritma: Iterasi titik tetap

1. Masukkan tebakan awal p_0, toleransi ε, dan jumlah iterasi maksimum N.
2. Untuk $n = 1, 2, \ \ldots, N$: hitung $p_n = g(p_{n-1})$.
3. Jika $|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$, keluarkan p_n sebagai hampiran titik tetap dan berhenti.
4. Jika belum, ganti p_{n-1} dengan p_n dan ulangi.

5. Bila N iterasi habis tanpa memenuhi kriteria, laporkan kegagalan (mungkin g tidak kontraktif atau tebakan awal terlalu jauh).

Contoh 1: Tiga penulisan ulang $x^2 - x - 1 = 0$

Akar positif $x^2 - x - 1 = 0$ adalah $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$. Mulai dari $p_0 = 1{,}5$, jalankan enam iterasi untuk (a) $g_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$, (b) $g_2(x) = x^2 - 1$, (c) $g_3(x) = \sqrt{1+x}$, lalu jelaskan perbedaannya dengan $|g'(p)|$.

Penyelesaian.

(a) g_1: $p_1 = 1{,}66667$, $p_2 = 1{,}6$, $p_3 = 1{,}625$, $p_4 = 1{,}61538$, $p_5 = 1{,}61905$, $p_6 = 1{,}61765$. Barisan berosilasi di sekitar p tetapi mendekat.

(b) g_2: $p_1 = 1{,}25$, $p_2 = 0{,}5625$, $p_3 = -0{,}68359$, $p_4 = -0{,}5327$, $p_5 = -0{,}71623$, $p_6 = -0{,}48701$. Barisan menjauh dari p dan tidak konvergen ke akar positif.

(c) g_3: $p_1 = 1{,}58114$, $p_2 = 1{,}60659$, $p_3 = 1{,}61449$, $p_4 = 1{,}61694$, $p_5 = 1{,}6177$, $p_6 = 1{,}61793$. Barisan naik monoton dan mendekat dengan cepat.

Penjelasan lewat turunan di $p \approx 1{,}618$: $|g_1'(p)| = \frac{1}{p^2} \approx 0{,}382$ (kontraktif, tanda $g_1' < 0$ menjelaskan osilasi); $|g_2'(p)| = 2p \approx 3{,}236 > 1$ (ekspansif, divergen); $|g_3'(p)| = \frac{1}{2\sqrt{1+p}} = \frac{1}{2p} \approx 0{,}309$ (kontraktif, tanda positif sehingga monoton). Galat g_3 berkurang dengan faktor sekitar $0{,}31$ per langkah, lebih cepat daripada g_1 dengan faktor $0{,}38$.

Contoh 2: Memeriksa syarat teorema untuk $g(x) = \sqrt{1+x}$

Tunjukkan bahwa $g(x) = \sqrt{1+x}$ memiliki titik tetap tunggal di $[1, 2]$ dan tentukan konstanta k.

Penyelesaian.

g kontinu dan naik pada $[1, 2]$, sehingga nilai minimumnya $g(1) = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$ dan maksimumnya $g(2) = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$. Jadi $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ dan titik tetap ada.

Turunannya $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ positif dan menurun, sehingga

$$\max_{x \in [1,\,2]} |g'(x)| = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}3536, \qquad k < 1.$$

Maka titik tetapnya tunggal, dan iterasi konvergen dari setiap $p_0 \in [1, 2]$.

Contoh 3: Banyak iterasi dari batas galat

Untuk $g(x) = \sqrt{1+x}$ pada $[1,2]$ dengan $p_0 = 1$, berapa iterasi yang cukup agar $|p_n - p| < 10^{-6}$?

Penyelesaian.

Dari $p_1 = g(1) = \sqrt{2} \approx 1{,}41421$ diperoleh $|p_1 - p_0| \approx 0{,}41421$, dan $k \approx 0{,}35355$. Syaratnya

$$\frac{k^n}{1-k}\,|p_1 - p_0| < 10^{-6} \;\Rightarrow\; k^n < \frac{(1-k)\cdot 10^{-6}}{0{,}41421} \;\Rightarrow\; n > \frac{\ln(1{,}0\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}6464/0{,}41421)}{\ln k} \approx 12{,}86.$$

Jadi $n = 13$ iterasi menjamin galat di bawah 10^{-6}. Secara nyata galat setelah 12 iterasi sudah sekitar $5{,}1\cdot 10^{-7}$ (batas bersifat konservatif karena memakai k terburuk di selang, sedangkan laju nyatanya $|g'(p)| \approx 0{,}309$).

Kesalahan umum

• Mengira iterasi konvergen hanya karena g kontinu. Konvergensi memerlukan kontraksi ($|g'| < 1$ di sekitar titik tetap) dan pemetaan $[a,b]$ ke dalam dirinya; tanpa itu barisan bisa menjauh, seperti $g(x) = x^2 - 1$ pada contoh.

• Hanya memeriksa $|g'(x)| < 1$ tetapi lupa memeriksa $g([a,b]) \subset [a,b]$. Tanpa pemetaan ke dalam diri, iterasi dapat keluar dari selang tempat $|g'| < 1$ berlaku.

• Menyimpulkan bahwa iterasi pasti gagal bila syarat teorema tidak terpenuhi. Syaratnya cukup, bukan perlu; misalnya $|g'| \le 1$ pada selang tertentu masih dapat konvergen.

• Menghentikan iterasi dengan $|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$ tanpa memperhatikan k. Bila k dekat 1, selisih berurutan kecil padahal galat sebenarnya sekitar $\frac{k}{1-k}$ kali lebih besar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $g(x) = x - f(x)$ tidak selalu pilihan yang baik, dan kebebasan apa yang kita miliki dalam membentuk g dari f?
2. Apa arti geometris $-1 < g'(p) < 0$ dibanding $0 < g'(p) < 1$ pada diagram sarang laba-laba (cobweb)?
3. Bagaimana hubungan antara nilai $|g'(p)|$ dan laju konvergensi, dan apa yang terjadi bila $g'(p) = 0$?
4. Bandingkan iterasi titik tetap dengan bisection: apa kelebihan masing-masing dari sisi jaminan, kecepatan, dan biaya per iterasi?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tunjukkan bahwa $g(x) = e^{-x}$ memiliki titik tetap tunggal di $[0{,}4;\ 0{,}7]$ dan hitung p_1, p_2 dari $p_0 = 0{,}5$.

Kunci: g turun, $g(0{,}4) \approx 0{,}6703$ dan $g(0{,}7) \approx 0{,}4966$, jadi $g([0{,}4; 0{,}7]) \subset [0{,}4; 0{,}7]$. $|g'(x)| = e^{-x} \le e^{-0{,}4} \approx 0{,}6703 < 1$, sehingga titik tetap tunggal ($\approx 0{,}56714$). $p_1 = e^{-0{,}5} \approx 0{,}60653$, $p_2 = e^{-0{,}60653} \approx 0{,}54524$.

2. Untuk $g(x) = x^2 - 1$, hitung $g'(p)$ pada titik tetap positif $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan simpulkan apakah iterasi dapat konvergen ke p dari tebakan awal yang tidak sama dengan p.

Kunci: $g'(p) = 2p \approx 3{,}236$. Karena $|g'(p)| > 1$, titik p menolak (repelling): iterasi menjauh dari p kecuali tebakan awal tepat p (atau kebetulan jatuh tepat pada p setelah beberapa langkah).

3. Dengan $k = 0{,}5$ dan $|p_1 - p_0| = 0{,}3$, berapa iterasi yang menjamin galat $< 10^{-5}$ menurut batas $\frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$?

Kunci: $\frac{0{,}5^n}{0{,}5} \cdot 0{,}3 < 10^{-5} \Rightarrow 0{,}5^n < 1{,}667 \cdot 10^{-5} \Rightarrow n > 15{,}87$, jadi $n = 16$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

2.3 Newton's Method and Its Extensions

Rujukan buku: halaman 67

Metode Newton (Newton–Raphson) mencari akar $f(x)=0$ dengan memakai garis singgung. Misalkan p_0 tebakan awal dekat akar p dan $f\in C^2$. Ekspansi Taylor orde satu di p_0 memberikan $0=f(p)=f(p_0)+(p-p_0)f'(p_0)+\frac{(p-p_0)^2}{2}f''(\xi)$. Bila p_0 cukup dekat sehingga suku kuadrat dapat diabaikan, diperoleh $p\approx p_0-\frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$. Mengulangi ini menghasilkan iterasi

$$p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},\qquad n\geq 1.$$

Secara geometris, p_n adalah titik potong garis singgung grafik f di $x=p_{n-1}$ dengan sumbu-x. Metode ini juga merupakan iterasi titik tetap (Seksi 2.2) dengan $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Turunan $g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ bernilai nol di akar sederhana ($f(p)=0$, $f'(p)\neq 0$), dan itulah sebabnya konvergensinya sangat cepat.

Teorema konvergensinya bersifat lokal: jika $f\in C^2[a,b]$, $p\in(a,b)$ memenuhi $f(p)=0$ dan $f'(p)\neq 0$, maka ada $\delta>0$ sehingga untuk setiap $p_0\in[p-\delta,p+\delta]$ barisan Newton konvergen ke p. Lajunya kuadratik: galat $e_n=p_n-p$ memenuhi $e_{n+1}\approx\frac{f''(p)}{2f'(p)}e_n^2$, sehingga banyak angka benar kira-kira berlipat dua pada tiap iterasi. Kata kunci teorema adalah 'cukup dekat': tebakan awal yang buruk dapat membuat barisan menjauh, berputar dalam siklus, atau melompat ke akar lain. Bahaya khusus muncul ketika $f'(p_{n-1})$ nol atau sangat kecil, karena langkah koreksinya menjadi sangat besar. Dalam praktik, sering dipakai bisection beberapa langkah dahulu untuk mendapat tebakan awal yang baik.

Kelemahan utama Newton adalah keharusan menghitung f'. Metode secant mengatasinya dengan mengganti $f'(p_{n-1})$ oleh hasil bagi selisih dari dua iterasi terakhir:

$$p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})(p_{n-1}-p_{n-2})}{f(p_{n-1})-f(p_{n-2})}.$$

Metode ini memerlukan dua tebakan awal, tetapi hanya satu evaluasi f per iterasi, dan lajunya superlinear dengan orde $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$ (dibuktikan di Seksi 2.4). Per evaluasi fungsi, secant sering lebih efisien daripada Newton. Metode posisi salah (false position, regula falsi) memakai rumus yang sama tetapi memilih pasangan titik sehingga f selalu berbeda tanda di kedua ujung, seperti bisection. Dengan demikian ia tetap mengapit akar, tetapi dapat konvergen lambat karena satu ujung sering tertinggal.

Akar ganda adalah kasus yang merusak keunggulan Newton. Bila $f(x)=(x-p)^m q(x)$ dengan $q(p)\neq 0$ dan $m\geq 2$, maka $f'(p)=0$ dan Newton hanya konvergen linear (dengan faktor $\frac{m-1}{m}$). Perbaikannya adalah menerapkan Newton pada $\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$, yang memiliki akar sederhana di p berapa pun m. Hasilnya adalah Newton termodifikasi

$$p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})f'(p_{n-1})}{[f'(p_{n-1})]^2-f(p_{n-1})f''(p_{n-1})},$$

yang kembali kuadratik, tetapi memerlukan f'' dan rentan terhadap galat pembulatan karena pembilang dan penyebut sama-sama mendekati nol di sekitar akar. Ringkasnya: Newton cepat dan sederhana untuk akar sederhana dengan tebakan baik; secant bila turunan mahal; bisection/false position bila kepastian lebih penting daripada kecepatan.

Konsep kunci

Metode Newton — Iterasi $p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$: titik potong garis singgung dengan sumbu-x. Cepat (kuadratik) tetapi hanya konvergen secara lokal.

Konvergensi lokal — Jaminan konvergensi hanya berlaku bila p_0 cukup dekat dengan akar sederhana p ($f(p)=0$, $f'(p)\neq 0$, $f\in C^2$). Tebakan jauh dapat divergen.

Konvergensi kuadratik — $|e_{n+1}| \approx C|e_n|^2$ dengan $C = \frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}$; banyak angka benar kira-kira berlipat dua tiap iterasi.

Metode secant — Newton tanpa turunan: f' diganti hasil bagi selisih dari dua iterasi terakhir. Perlu dua tebakan awal, satu evaluasi f per iterasi, orde $\approx 1{,}618$.

Posisi salah (false position) — Memakai rumus secant tetapi selalu mempertahankan pasangan titik dengan tanda f berlawanan, sehingga akar tetap terkurung; lajunya bisa lambat.

Akar ganda — Akar p dengan $f(x) = (x-p)^m q(x)$, $m \geq 2$, $q(p) \neq 0$. Di sini $f'(p) = 0$ dan Newton biasa hanya konvergen linear dengan faktor $\frac{m-1}{m}$.

Newton termodifikasi — Newton untuk $\mu = \frac{f}{f'}$, yang berakar sederhana di p untuk sembarang kelipatan; mengembalikan konvergensi kuadratik tetapi memerlukan f''.

Metode Newton

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Metode secant

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}$$

Konstanta galat Newton (akar sederhana)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|}$$

Newton termodifikasi (akar ganda)

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})f'(p_{n-1})}{[f'(p_{n-1})]^2 - f(p_{n-1})f''(p_{n-1})}$$

Newton sebagai titik tetap

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Algoritma: Metode Newton

1. Masukkan tebakan awal p_0, toleransi ε, dan batas iterasi N.
2. Untuk $n = 1, 2, \ldots, N$: jika $f'(p_{n-1}) = 0$ (atau sangat kecil), berhenti dan laporkan kegagalan; pilih tebakan lain.
3. Hitung $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$.
4. Jika $|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$, keluarkan p_n dan berhenti.
5. Jika N iterasi habis tanpa memenuhi kriteria, laporkan bahwa metode gagal mencapai toleransi.

Contoh 1: Newton untuk $f(x) = xe^x - 1$

Hampiri akar $f(x) = xe^x - 1$ dengan metode Newton dari $p_0 = 1$. Di sini $f'(x) = e^x(1+x)$.

Penyelesaian.

Hasil iterasi dari $p_0 = 1$ (akar sebenarnya $p \approx 0{,}567143$):

$n = 1$: $p_1 = 0{,}68393972$, galat $\approx 1{,}17 \cdot 10^{-1}$.

$n = 2$: $p_2 = 0{,}57745448$, galat $\approx 1{,}03 \cdot 10^{-2}$.

$n = 3$: $p_3 = 0{,}56722974$, galat $\approx 8{,}64 \cdot 10^{-5}$.

$n = 4$: $p_4 = 0{,}56714330$, galat $\approx 6{,}12 \cdot 10^{-9}$.

Jumlah angka benar kira-kira berlipat dua tiap langkah. Cek sifat kuadrat: $\frac{e_4}{e_3^2} \approx 0{,}819$, dekat dengan $\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|} \approx 0{,}819$.

Contoh 2: Secant dan posisi salah untuk $x^3 + x - 3 = 0$

Bandingkan metode secant ($p_0 = 1$, $p_1 = 2$) dan posisi salah (selang $[1, 2]$) untuk $g(x) = x^3 + x - 3$. Perhatikan $g(1) = -1 < 0$ dan $g(2) = 7 > 0$.

Penyelesaian.

Akar sebenarnya $p \approx 1{,}213412$. Secant dengan $p_0 = 1$, $p_1 = 2$:

$p_2 = 1{,}125000$, galat $\approx 8{,}84 \cdot 10^{-2}$.

$p_3 = 1{,}177982$, galat $\approx 3{,}54 \cdot 10^{-2}$.

$p_4 = 1{,}215624$, galat $\approx 2{,}21 \cdot 10^{-3}$.

$p_5 = 1{,}213358$, galat $\approx 5{,}34 \cdot 10^{-5}$.

$p_6 = 1{,}213412$, galat $\approx 7{,}93 \cdot 10^{-8}$.

Posisi salah (false position) pada $[1, 2]$:

iterasi 1: $p = 1{,}125000$, galat $\approx 8{,}84 \cdot 10^{-2}$.

iterasi 2: $p = 1{,}177982$, galat $\approx 3{,}54 \cdot 10^{-2}$.

iterasi 3: $p = 1{,}199415$, galat $\approx 1{,}40 \cdot 10^{-2}$.

iterasi 4: $p = 1{,}207914$, galat $\approx 5{,}50 \cdot 10^{-3}$.

iterasi 5: $p = 1{,}211257$, galat $\approx 2{,}15 \cdot 10^{-3}$.

Secant jauh lebih cepat di sini, sedangkan false position menjaga selang pengapit tetapi satu ujungnya cenderung macet sehingga galatnya hanya turun linear (faktor sekitar $0{,}39$ per iterasi).

Contoh 3: Akar ganda: Newton biasa vs termodifikasi

Fungsi $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ memiliki akar ganda $p = 1$. Bandingkan Newton biasa dan Newton termodifikasi dari $p_0 = 2$, dengan $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$ dan $f''(x) = 2(x+2) + 4(x-1)$.

Penyelesaian.

Akar ganda $p = 1$ (kelipatan 2), $p_0 = 2$. Galat $|p_n - 1|$:

$n = 1$: Newton biasa $5{,}556 \cdot 10^{-1}$, Newton termodifikasi $9{,}091 \cdot 10^{-2}$.

$n = 2$: Newton biasa $2{,}979 \cdot 10^{-1}$, Newton termodifikasi $1{,}464 \cdot 10^{-3}$.

$n = 3$: Newton biasa $1{,}554 \cdot 10^{-1}$, Newton termodifikasi $3{,}576 \cdot 10^{-7}$.

$n = 4$: Newton biasa $7{,}956 \cdot 10^{-2}$, Newton termodifikasi $2{,}132 \cdot 10^{-14}$.

$n = 5$: Newton biasa $4{,}029 \cdot 10^{-2}$, Newton termodifikasi $< 10^{-15}$.

Galat Newton biasa menyusut dengan faktor sekitar $\frac{1}{2}$ per langkah (linear), sedangkan versi termodifikasi menyusut kuadratik. Pada iterasi kelima, galat versi termodifikasi sudah di bawah ketelitian mesin.

Kesalahan umum

• Mengira Newton selalu konvergen. Teoremanya lokal; dari tebakan yang jauh (misalnya $f(x) = \arctan x$ dari $p_0 = 2$) barisan dapat menjauh tanpa batas.

• Memakai Newton di titik dengan $f'(p_{n-1}) \approx 0$. Koreksi $\frac{f}{f'}$ menjadi sangat besar dan iterasi melompat ke daerah yang tak terduga.

• Memakai Newton biasa pada akar ganda dan heran dengan lajunya yang lambat. Konvergensinya hanya linear; periksa kelipatan akar atau pakai versi termodifikasi.

• Mengira posisi salah selalu lebih cepat dari bisection. Satu ujung selang dapat macet sehingga konvergensinya bisa lebih lambat, meski akar tetap terkurung.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $g'(p) = 0$ pada Newton? Apa kaitannya dengan kecepatan konvergensi kuadratik?
2. Per evaluasi fungsi, kapan secant lebih unggul daripada Newton, dan kapan sebaliknya?
3. Bagaimana mendeteksi bahwa suatu akar adalah akar ganda dari perilaku iterasi Newton saja?
4. Rancang strategi yang menggabungkan bisection dan Newton agar iterasi terjamin konvergen sekaligus cepat.

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung p_1 dan p_2 metode Newton untuk $f(x) = x^2 - 5$ dari $p_0 = 2$.

Kunci: $f'(x) = 2x$. $p_1 = 2 - \frac{-1}{4} = 2{,}25$, $p_2 = 2{,}25 - \frac{0{,}0625}{4{,}5} \approx 2{,}236111$ (akar $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$).

2. Hitung p_2 metode secant untuk $f(x) = x^2 - 5$ dengan $p_0 = 2$, $p_1 = 3$.

Kunci: $f(2) = -1$, $f(3) = 4$. $p_2 = 3 - \frac{4 \cdot (3-2)}{4-(-1)} = 3 - 0{,}8 = 2{,}2$.

3. Terapkan Newton pada $f(x) = \arctan x$ dari $p_0 = 2$ dan hitung p_1, p_2. Apa yang terjadi?

Kunci: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sehingga $p_n = p_{n-1} - (1 + p_{n-1}^2)\arctan p_{n-1}$. $p_1 \approx -3{,}5357$, $p_2 \approx 13{,}951$: barisan menjauh dari akar 0 (divergen).

4. Untuk $f(x) = (x-2)^3$, tunjukkan bahwa Newton biasa memberi $p_n - 2 = \frac{2}{3}(p_{n-1} - 2)$ dan hitung p_1 dari $p_0 = 3$.

Kunci: $\frac{f}{f'} = \frac{x-2}{3}$ sehingga $p_n - 2 = (p_{n-1} - 2) - \frac{p_{n-1}-2}{3} = \frac{2}{3}(p_{n-1} - 2)$. $p_1 = 2 + \frac{2}{3} = 2{,}6667$ (linear, faktor $\frac{m-1}{m}$ dengan $m = 3$).

Web by: Steven Paulus Siahaan

2.4 Error Analysis for Iterative Methods

Rujukan buku: halaman 79

Bagaimana mengukur seberapa cepat suatu barisan konvergen? Misalkan $p_n \to p$ dengan $p_n \neq p$ untuk semua n, dan tulis galat $e_n = |p_n - p|$. Barisan dikatakan konvergen dengan orde α dan konstanta galat asimtotik λ bila

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^{\alpha}} = \lambda, \qquad \alpha > 0,\ \lambda > 0.$$

Orde $\alpha = 1$ (dengan $\lambda < 1$) disebut linear, dan $\alpha = 2$ disebut kuadratik; $1 < \alpha < 2$ disebut superlinear. Orde menentukan sifat kualitatif lajunya: pada konvergensi linear, jumlah angka benar bertambah dengan banyak tetap tiap iterasi, sedangkan pada orde α jumlah angka benar kira-kira dikalikan α. Konstanta λ hanya mempengaruhi laju secara kuantitatif. Misalnya, dengan galat awal $0{,}1$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$, barisan linear butuh puluhan iterasi untuk mencapai 10^{-12}, sedangkan barisan kuadratik hanya beberapa.

Untuk iterasi titik tetap $p_n = g(p_{n-1})$ ada dua teorema yang menentukan ordenya. Pertama, jika g' kontinu, $|g'(x)| \le k < 1$ pada selang yang dipetakan ke dirinya sendiri, dan $g'(p) \neq 0$, maka untuk $p_0 \neq p$ barisan konvergen ke p secara linear dengan $\lambda = |g'(p)|$. Alasannya: $p_{n+1} - p = g'(\xi_n)(p_n - p)$ dengan $\xi_n \to p$. Kedua, jika $g(p) = p$, $g'(p) = 0$, dan g'' kontinu serta terbatas di sekitar p, maka iterasi konvergen minimal kuadratik untuk p_0 yang cukup dekat, karena ekspansi Taylor memberi $p_{n+1} - p = \frac{g''(\xi_n)}{2}(p_n - p)^2$. Bila $g''(p) \neq 0$ maka ordenya tepat 2 dengan $\lambda = \frac{|g''(p)|}{2}$. Secara umum orde α memerlukan $g'(p) = \ldots = g^{(\alpha-1)}(p) = 0$ dan $g^{(\alpha)}(p) \neq 0$.

Teorema kedua menjelaskan mengapa metode Newton cepat. Bila mencari $g(x) = x - \phi(x)f(x)$ yang memenuhi $g'(p) = 0$, syaratnya $\phi(p) = \frac{1}{f'(p)}$, dan pilihan paling sederhana $\phi = \frac{1}{f'}$ menghasilkan tepat metode Newton. Jadi Newton 'ditemukan kembali' dari tuntutan $g'(p) = 0$. Syarat $f'(p) \neq 0$ ini berkaitan dengan kelipatan akar.

Akar p dari f dikatakan berkelipatan m bila $f(x) = (x-p)^m q(x)$ dengan $q(p) \neq 0$. Untuk $f \in C^1$, akar bersifat sederhana ($m = 1$) jika dan hanya jika $f(p) = 0$ dan $f'(p) \neq 0$. Untuk $f \in C^m$, akar berkelipatan tepat m jika dan hanya jika $f(p) = f'(p) = \ldots = f^{(m-1)}(p) = 0$ dan $f^{(m)}(p) \neq 0$. Pada akar ganda ($m \ge 2$) turunan $g'(p)$ untuk Newton sama dengan $\frac{m-1}{m}$, sehingga konvergensinya hanya linear. Ada dua perbaikan: (i) Newton termodifikasi, yaitu Newton untuk $\mu = \frac{f}{f'}$ yang punya akar sederhana, memerlukan f'' dan kembali kuadratik; (ii) bila kelipatan m diketahui, pakai $p_n = p_{n-1} - m\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$.

Ringkasnya: orde dapat ditaksir dari data numerik lewat $\alpha \approx \frac{\ln(e_{n+1}/e_n)}{\ln(e_n/e_{n-1})}$. Analisis ini melengkapi Seksi 2.2 (kapan iterasi konvergen) dan 2.3 (metode Newton dan secant), serta menjadi dasar percepatan konvergensi di Seksi 2.5.

Konsep kunci

Orde konvergensi — Bilangan α dengan $\lim \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^{\alpha}} = \lambda > 0$. Makin besar α, makin cepat jumlah angka benar bertambah.

Konstanta galat asimtotik — Bilangan λ pada definisi di atas. Pada orde sama, λ yang lebih kecil memberi konvergensi lebih cepat.

Konvergensi linear dan kuadratik — Linear: $\alpha = 1$, $\lambda < 1$, galat dikalikan sekitar λ tiap iterasi. Kuadratik: $\alpha = 2$, angka benar kira-kira berlipat dua tiap iterasi.

Syarat orde iterasi titik tetap — Bila $g'(p) \neq 0$ ordenya 1 dengan $\lambda = |g'(p)|$. Bila $g'(p) = 0$ dan $g''(p) \neq 0$ ordenya 2 dengan $\lambda = \frac{|g''(p)|}{2}$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Akar sederhana — Akar p dengan $f(p) = 0$ dan $f'(p) \neq 0$. Newton konvergen kuadratik di akar semacam ini.

Kelipatan akar — Akar berkelipatan m bila $f(x) = (x-p)^m q(x)$, $q(p) \neq 0$; ekuivalen dengan $f(p) = \ldots = f^{(m-1)}(p) = 0 \neq f^{(m)}(p)$.

Newton termodifikasi — Newton untuk $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$; memulihkan konvergensi kuadratik pada akar ganda dengan biaya turunan kedua.

Definisi orde konvergensi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^\alpha} = \lambda$$

Taksiran orde dari data

$$\alpha \approx \frac{\ln(e_{n+1}/e_n)}{\ln(e_n/e_{n-1})}, \qquad e_n = |p_n - p|$$

Iterasi titik tetap: orde 1

$$g'(p) \neq 0: \quad \lambda = |g'(p)|$$

Iterasi titik tetap: orde 2

$$g'(p) = 0,\ g''(p) \neq 0: \quad \lambda = \frac{|g''(p)|}{2}$$

Akar berkelipatan m

$$f(x) = (x-p)^m q(x), \quad q(p) \neq 0$$

Newton untuk akar ganda (kelipatan diketahui)

$$p_n = p_{n-1} - m\,\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Algoritma: Menaksir orde konvergensi secara numerik

1. Jalankan iterasi hingga diperoleh beberapa suku $p_0, \ldots, p_N$ dengan presisi tinggi, dan ambil $p \approx p_N$ atau nilai akar yang diketahui.
2. Hitung galat $e_n = |p_n - p|$ untuk $n = 0, \ldots, N-1$ (jangan menyertakan p_N sendiri).
3. Untuk beberapa n yang berurutan, hitung $\alpha_n = \frac{\ln(e_{n+1}/e_n)}{\ln(e_n/e_{n-1})}$.
4. Jika α_n stabil mendekati suatu bilangan, itulah taksiran orde; hitung $\lambda \approx \frac{e_{n+1}}{e_n^\alpha}$.
5. Waspadai galat pembulatan: pada galat mendekati ketelitian mesin, taksiran menjadi tidak bermakna. Pakai aritmetika presisi tinggi bila perlu.

Contoh 1: Orde linear: $g(x) = e^{-x}$

Iterasi $p_n = e^{-p_{n-1}}$ dengan $p_0 = 0{,}5$. Tentukan ordenya dan konstanta galat asimtotiknya secara numerik dan teoretis.

Penyelesaian.

Titik tetap $p \approx 0{,}567143$ dan $g'(p) = -e^{-p} \approx -0{,}5671$, tidak nol. Dari $p_0 = 0{,}5$ dengan $e_n = |p_n - p|$:

$n = 4$: $e_n = 7{,}079 \cdot 10^{-3}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 0{,}5692$.

$n = 8$: $e_n = 7{,}338 \cdot 10^{-4}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 0{,}5674$.

$n = 12$: $e_n = 7{,}594 \cdot 10^{-5}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 0{,}5672$.

$n = 13$: $e_n = 4{,}307 \cdot 10^{-5}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = 0{,}5671$.

Rasio mendekati $|g'(p)| \approx 0{,}5671$ dan eksponen $\alpha = 1$: konvergensi linear dengan $\lambda = |g'(p)|$. Tiap iterasi menambah sekitar $-\log_{10} 0{,}5671 \approx 0{,}246$ angka desimal benar.

Contoh 2: Orde kuadratik: Newton untuk $x^2 - 2$

Taksir orde dan konstanta galat metode Newton untuk $f(x) = x^2 - 2$ dari $p_0 = 1{,}5$ (dihitung dengan presisi 80 digit).

Penyelesaian.

Newton untuk $f(x) = x^2 - 2$ dari $p_0 = 1{,}5$, akar $\sqrt{2}$. Karena $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, konstanta teoretisnya $\frac{|f''(p)|}{2|f'(p)|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35355$.

$n = 0$: $e_n = 8{,}579 \cdot 10^{-2}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = 0{,}3333$.

$n = 1$: $e_n = 2{,}453 \cdot 10^{-3}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = 0{,}3529$.

$n = 2$: $e_n = 2{,}124 \cdot 10^{-6}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = 0{,}3536$.

$n = 3$: $e_n = 1{,}595 \cdot 10^{-12}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = 0{,}3536$.

Rasio $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ menuju $0{,}35355$. Taksiran eksponen dari $\alpha \approx \frac{\ln(e_{n+1}/e_n)}{\ln(e_n/e_{n-1})}$ memberi $1{,}984$ dan $2{,}000$, mendekati 2.

Contoh 3: Akar ganda: $f(x) = e^x - 1 - x$

Tunjukkan bahwa $p = 0$ adalah akar berkelipatan 2 dari $f(x) = e^x - 1 - x$, lalu bandingkan Newton biasa dan termodifikasi dari $p_0 = 1$.

Penyelesaian.

$f(0) = 0$, $f'(0) = e^0 - 1 = 0$, $f''(0) = 1 \neq 0$: akar ganda berkelipatan $m = 2$. Dari $p_0 = 1$:

$n = 1$: Newton biasa $p_n = 0{,}581977$ (rasio p_n/p_{n-1} $0{,}5820$), termodifikasi galat $2{,}34 \cdot 10^{-1}$.

$n = 2$: Newton biasa $p_n = 0{,}319055$ (rasio p_n/p_{n-1} $0{,}5482$), termodifikasi galat $8{,}46 \cdot 10^{-3}$.

$n = 3$: Newton biasa $p_n = 0{,}167996$ (rasio p_n/p_{n-1} $0{,}5265$), termodifikasi galat $1{,}19 \cdot 10^{-5}$.

$n = 4$: Newton biasa $p_n = 0{,}086349$ (rasio p_n/p_{n-1} $0{,}5140$), termodifikasi galat $2{,}36 \cdot 10^{-11}$.

Newton biasa menurunkan galat dengan faktor $\frac{m-1}{m} = \frac{1}{2}$ (linear), sedangkan Newton termodifikasi kuadratik: galat $2{,}34 \cdot 10^{-1} \to 8{,}46 \cdot 10^{-3} \to 1{,}19 \cdot 10^{-5}$ pada tiga iterasi pertama.

Kesalahan umum

• Menyimpulkan orde dari satu rasio galat saja. Rasio harus diamati stabil pada beberapa iterasi berurutan, dan pada galat mendekati ketelitian mesin taksiran tidak lagi dapat dipercaya.

• Mengira λ yang kecil berarti orde tinggi. Orde dan konstanta adalah dua hal berbeda; barisan linear dengan $\lambda = 0{,}01$ tetap hanya linear.

• Mengira Newton selalu kuadratik. Hanya di akar sederhana; pada akar ganda ia linear dengan $\lambda = \frac{m-1}{m}$.

• Memakai syarat $|g'(x)| < 1$ saja untuk menyimpulkan orde kuadratik. Orde kuadratik memerlukan $g'(p) = 0$ tepat di titik tetap.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $g'(p) = 0$ menghasilkan orde dua? Tuliskan ekspansi Taylor $g(p_n)$ di sekitar p untuk menjelaskannya.
2. Dua metode: orde 2 dengan satu evaluasi fungsi per iterasi dan orde $1{,}618$ dengan satu evaluasi per iterasi. Mana yang lebih efisien per evaluasi bila Newton memerlukan dua evaluasi (f dan f')?
3. Bagaimana akar ganda dapat dikenali dari perilaku numerik iterasi Newton, tanpa mengetahui bentuk f secara analitik?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan orde dan konstanta galat iterasi $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$ di titik tetap $p = \sqrt{3}$.

Kunci: $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}$, $g'(\sqrt{3}) = 0$; $g''(x) = \frac{3}{x^3}$, $g''(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Orde 2 dengan $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}2887$.

2. Tunjukkan bahwa $f(x) = 1 - \cos x$ memiliki akar berkelipatan 2 di $p = 0$. Berapa faktor konvergensi Newton biasa di sana?

Kunci: $f(0) = 0$, $f'(x) = \sin x \Rightarrow f'(0) = 0$, $f''(x) = \cos x \Rightarrow f''(0) = 1 \neq 0$, jadi $m = 2$. Newton biasa konvergen linear dengan faktor $\frac{m-1}{m} = \frac{1}{2}$.

3. Barisan $p_n = 2^{-2^n}$ konvergen ke 0. Tentukan orde dan λ.

Kunci: $\frac{p_{n+1}}{p_n^2} = \frac{2^{-2^{n+1}}}{2^{-2 \cdot 2^n}} = 1$, jadi orde 2 dan $\lambda = 1$.

4. Galat awal $e_0 = 0{,}1$. Berapa iterasi agar $e_n < 10^{-12}$ bila (a) $e_{n+1} = 0{,}5\, e_n$, (b) $e_{n+1} = 0{,}5\, e_n^2$?

Kunci: (a) $0{,}1 \cdot 0{,}5^n < 10^{-12} \Rightarrow n > \log_2(10^{11}) \approx 36{,}5$, jadi $n = 37$. (b) galat berturut-turut $5{,}00 \cdot 10^{-3}$, $1{,}25 \cdot 10^{-5}$, $7{,}81 \cdot 10^{-11}$, $3{,}05 \cdot 10^{-21}$, jadi $n = 4$ iterasi.

2.5 Accelerating Convergence

Rujukan buku: halaman 86

Banyak metode iteratif, terutama iterasi titik tetap, menghasilkan barisan yang hanya konvergen linear: galat berkurang kira-kira dengan faktor tetap pada tiap langkah. Konvergensi kuadratik seperti pada metode Newton adalah kemewahan yang tidak selalu tersedia. Seksi ini memperkenalkan metode Δ^2 Aitken, sebuah cara mengolah barisan yang sudah ada (tanpa mengetahui asalnya) menjadi barisan baru yang menuju limit yang sama dengan lebih cepat, lalu metode Steffensen yang menyisipkan gagasan itu ke dalam iterasi titik tetap.

Motivasi Aitken sangat sederhana. Misalkan $p_n \to p$ secara linear, jadi untuk n besar galat $e_n = p_n - p$ berperilaku seperti deret geometri: $e_{n+1} \approx \lambda e_n$ dengan $|\lambda| < 1$ yang hampir sama untuk n dan $n+1$. Dengan demikian $\frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} \approx \frac{p_{n+2}-p}{p_{n+1}-p}$. Persamaan hampiran ini, dengan p sebagai satu-satunya yang tak diketahui, dapat diselesaikan untuk p. Setelah disederhanakan diperoleh barisan baru $\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$. $

Rumus ini lebih ringkas dengan operator selisih maju: $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$ dan $\Delta^2 p_n = \Delta(\Delta p_n) = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$. Maka $\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n}$. Sebagai pemeriksaan, jika $p_n = p + c\lambda^n$ persis geometrik, rumus ini memberi $\hat{p}_n = p$ untuk setiap n; jadi Aitken tepat untuk barisan geometrik dan hampiran yang baik untuk barisan yang mendekati geometrik. Satu catatan hitung: $\hat{p}_n$ memerlukan tiga suku p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, dan penyebut $\Delta^2 p_n$ berupa selisih bilangan yang hampir sama, sehingga pada praktiknya rentan terhadap galat pembulatan; bila $\Delta^2 p_n = 0$, rumus tidak dapat dipakai.

Ketepatan klaim "lebih cepat" dirumuskan oleh Teorema 2.14 (di buku): jika $p_n \to p$ secara linear, yaitu $p_n \neq p$ dan $\lim \frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} = \lambda$ dengan $|\lambda| < 1$ (di buku dituliskan sebagai limit yang kurang dari 1), maka $\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0$. Artinya galat barisan baru menjadi sangat kecil relatif terhadap galat barisan lama. Ini tidak berarti $\hat{p}_n$ konvergen kuadratik; hanya lebih cepat dalam pengertian rasio galat menuju nol.

Metode Steffensen memanfaatkan ide yang sama dalam pencarian titik tetap $p = g(p)$. Metode Aitken murni membangun seluruh barisan $p_0, p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), \ldots$ lebih dulu lalu mengolahnya. Steffensen berbeda: dari $p_0^{(0)}$ ia menghitung $p_1^{(0)} = g(p_0^{(0)})$ dan $p_2^{(0)} = g(p_1^{(0)})$, memakai rumus Aitken untuk memperoleh $p_0^{(1)}$, lalu memulai ulang iterasi titik tetap dari $p_0^{(1)}$, bukan dari $p_2^{(0)}$. Setiap putaran mengevaluasi g dua kali dan satu kali memakai rumus Δ^2. Hasilnya luar biasa: tanpa turunan, metode ini konvergen kuadratik. Teorema 2.15 menyatakan: jika p adalah titik tetap g dengan $g'(p) \neq 1$ dan $g \in C^3$ pada suatu selang di sekitar p, maka Steffensen konvergen kuadratik untuk tebakan awal yang cukup dekat. Perhatikan bahwa kondisinya hanya $g'(p) \neq 1$, tidak mensyaratkan $|g'(p)| < 1$; jadi metode ini kadang menemukan titik tetap yang tidak dapat ditemukan iterasi biasa.

Kelebihan Steffensen: kecepatan setara Newton tanpa menghitung turunan. Kekurangan: dua evaluasi g per putaran, hanya konvergen bila tebakan awal cukup dekat, dan penyebut Δ^2 dapat nol (jika terjadi, hentikan dan pakai $p_2^{(n-1)}$ sebagai taksiran terbaik). Seksi ini melanjutkan Seksi 2.2 (iterasi titik tetap) dan 2.4 (Newton); ide mengolah barisan lambat menjadi cepat muncul lagi dalam ekstrapolasi Richardson di Bab 4.

Konsep kunci

Konvergensi linear — Galat berkurang kira-kira dengan faktor tetap $|\lambda| < 1$ per iterasi: $e_{n+1} \approx \lambda e_n$. Aitken dirancang untuk barisan jenis ini.

Selisih maju Δ — $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$ dan $\Delta^k p_n = \Delta(\Delta^{k-1} p_n)$; khususnya $\Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$.

Metode Δ^2 **Aitken** — Barisan baru $\hat{p}_n = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n}$ yang menaksir limit dengan mengandaikan galat berperilaku geometrik; tepat untuk barisan geometrik.

Konvergensi lebih cepat (Teorema 2.14) — Jika $p_n \to p$ linear dengan $p_n \neq p$, maka $\frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} \to 0$. Hanya menjamin rasio galat menuju nol, bukan orde kuadratik.

Metode Steffensen — Iterasi titik tetap yang menerapkan rumus Aitken setiap tiga langkah lalu memulai ulang dari hasilnya; memberi konvergensi kuadratik tanpa turunan.

Syarat Teorema 2.15 — $g'(p) \neq 1$ dan $g \in C^3[p-\delta, p+\delta]$; konvergensi kuadratik untuk setiap p_0 dalam selang itu.

Penyebut nol dan galat pembulatan — Bila $\Delta^2 p_n = 0$ rumus gagal; bila hampir nol, pengurangan bilangan berdekatan memperbesar galat pembulatan. Karena itu hitung dengan presisi cukup.

Selisih maju

$$\Delta p_n = p_{n+1} - p_n, \qquad \Delta^2 p_n = p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n$$

Rumus Δ^2 **Aitken**

$$\hat{p}_n = p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} = p_n - \frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n}$$

Asumsi dasar penurunan

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$$

Kesimpulan Teorema 2.14

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\hat{p}_n - p}{p_n - p} = 0$$

Satu putaran Steffensen

$$p_1 = g(p_0), \quad p_2 = g(p_1), \quad p = p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_2 - 2p_1 + p_0}$$

Algoritma: Steffensen

1. Masukkan tebakan awal p_0, toleransi TOL, dan batas iterasi N_0. Set $i = 1$.
2. Selama $i \leq N_0$, kerjakan langkah 3 sampai 6.
3. Hitung $p_1 = g(p_0)$, $p_2 = g(p_1)$. Jika $p_2 - 2p_1 + p_0 = 0$, hentikan dan pilih p_2 sebagai taksiran terbaik; jika tidak, hitung $p = p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_2 - 2p_1 + p_0}$.
4. Jika $|p - p_0| < TOL$, keluarkan p dan berhenti (berhasil).
5. Set $i = i + 1$ dan $p_0 = p$ (iterasi dimulai ulang dari hasil Aitken).
6. Jika N_0 putaran habis, laporkan bahwa metode gagal setelah N_0 iterasi.

Contoh 1: Aitken pada iterasi $p_{n+1} = e^{-p_n}$

Barisan $p_0 = 0{,}5$, $p_{n+1} = e^{-p_n}$ konvergen linear ke $p \approx 0{,}567143$ (akar $x = e^{-x}$). Hitung $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2$ dan bandingkan galatnya.

Penyelesaian.

Suku-suku asli: $p_0 = 0{,}500000$, $p_1 = 0{,}606531$, $p_2 = 0{,}545239$, $p_3 = 0{,}579703$, $p_4 = 0{,}560065$.

Untuk $\hat{p}_0$: $\Delta p_0 = 0{,}606531 - 0{,}5 = 0{,}106531$, $\Delta^2 p_0 = 0{,}545239 - 2(0{,}606531) + 0{,}5 = -0{,}167822$. Maka $\hat{p}_0 = 0{,}5 - \frac{(0{,}106531)^2}{-0{,}167822} = 0{,}5 + 0{,}067624 = 0{,}567624.$

Dengan cara yang sama $\hat{p}_1 = 0{,}567299$ dan $\hat{p}_2 = 0{,}567193$.

Perbandingan galat: $|p_4 - p| \approx 7{,}1 \times 10^{-3}$ sedangkan $|\hat{p}_2 - p| \approx 5{,}0 \times 10^{-5}$. Kedua nilai memakai suku sampai p_4, tetapi barisan Aitken jauh lebih dekat ke limit. Perhatikan juga bahwa galat p_n berselang-seling tanda (p_n bergantian di atas dan di bawah p), situasi yang cocok bagi Aitken.

Contoh 2: Steffensen untuk $x = \cos x$

Gunakan metode Steffensen dengan $g(x) = \cos x$ dan $p_0 = 0{,}5$. Tunjukkan awal tiap putaran dan sifat konvergensinya.

Penyelesaian.

Putaran pertama: $p_1 = \cos 0{,}5 = 0{,}877583$, $p_2 = \cos 0{,}877583 = 0{,}639012$, sehingga $p_0^{(1)} = 0{,}5 - \frac{(0{,}377583)^2}{0{,}639012 - 2(0{,}877583) + 0{,}5} = 0{,}731385.$

Titik awal tiap putaran berikutnya (dihitung dengan kode): $p_0^{(2)} = 0{,}7390763404$, $p_0^{(3)} = 0{,}7390851332$, dan selanjutnya $0{,}73908513322$ yang tidak berubah lagi. Akar sebenarnya $p = 0{,}7390851332152$.

Galat awal tiap putaran: $0{,}239$; $7{,}7 \times 10^{-3}$; $8{,}8 \times 10^{-6}$; $1{,}2 \times 10^{-11}$. Perhatikan galat kira-kira dikuadratkan dan dikali konstanta kecil pada tiap putaran: itulah ciri konvergensi kuadratik. Bandingkan dengan iterasi $p_{n+1} = \cos p_n$ biasa yang butuh puluhan langkah untuk ketelitian serupa.

Contoh 3: Aitken tepat untuk barisan geometrik

Barisan $p_n = 3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Hitung $\hat{p}_0$ dan jelaskan hasilnya.

Penyelesaian.

$p_0 = 5$, $p_1 = 4$, $p_2 = 3{,}5$. Maka $\Delta p_0 = -1$, $\Delta^2 p_0 = 3{,}5 - 8 + 5 = 0{,}5$ dan $\hat{p}_0 = 5 - \frac{(-1)^2}{0{,}5} = 3.$

Hasilnya tepat sama dengan limit $p = 3$. Alasannya: galat $e_n = 2(1/2)^n$ persis geometrik dengan rasio $\frac{1}{2}$, sehingga hampiran $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}}$ yang dipakai saat menurunkan rumus berlaku sebagai kesamaan. Hal yang sama terjadi untuk semua n (periksa $\hat{p}_1$).

Kesalahan umum

• Mengira barisan Aitken konvergen kuadratik. Teorema 2.14 hanya menjamin rasio galatnya terhadap barisan asli menuju nol; kuadratik baru diperoleh pada metode Steffensen.

• Menerapkan Aitken langsung ke barisan yang bukan linear (misalnya sudah kuadratik atau terlalu lambat seperti $1/n$) lalu menyimpulkan metodenya "gagal" atau "selalu berhasil". Teorema mensyaratkan konvergensi linear dengan rasio limit < 1 dalam nilai mutlak.

• Tidak mengecek penyebut $\Delta^2 p_n$. Nilai nol menyebabkan pembagian dengan nol, dan nilai sangat kecil memperbesar galat pembulatan; gunakan presisi cukup dan hentikan iterasi lebih awal.

• Mencampuradukkan Aitken dan Steffensen: pada Aitken barisan asli dihitung dahulu tanpa diubah, pada Steffensen iterasi dimulai ulang dari $\hat{p}$ sehingga barisannya berbeda.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa rumus Aitken tepat untuk barisan geometrik? Apa yang dikatakan hal ini tentang kapan metode ini bekerja baik dan kapan tidak?
2. Teorema 2.15 hanya meminta $g'(p) \neq 1$. Apa arti hal ini bagi titik tetap yang tidak dapat ditemukan oleh iterasi titik tetap biasa (misalnya $|g'(p)| > 1$)? Apa yang tetap menjadi syarat untuk tebakan awal?
3. Bandingkan Steffensen dan Newton dari segi evaluasi fungsi/turunan per putaran dan orde konvergensi. Pada kasus apa Steffensen lebih menarik?
4. Mengapa $\hat{p}_n$ memerlukan p_{n+2} dan bagaimana ini memengaruhi jumlah evaluasi g untuk mendapatkan hasil yang sama?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Barisan $p_n = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergen ke 2. Hitung $\hat{p}_0$.

Kunci: $p_0 = 3$, $p_1 = 2{,}3333$, $p_2 = 2{,}1111$. $\Delta p_0 = -0{,}6667$, $\Delta^2 p_0 = 0{,}4444$, jadi $\hat{p}_0 = 3 - \frac{0{,}4444}{0{,}4444} = 2$ (tepat, karena barisan geometrik).

2. Fungsi $g(x) = \sqrt{2 + x}$ memiliki titik tetap $p = 2$. Lakukan dua putaran Steffensen dengan $p_0 = 1$.

Kunci: Putaran 1: $p_1 = 1{,}732051$, $p_2 = 1{,}931852$, $p_0^{(1)} = 2{,}006855$. Putaran 2: $p_1 = 2{,}001713$, $p_2 = 2{,}000428$, $p_0^{(2)} = 2{,}0000002$. Galat turun dari $6{,}9 \times 10^{-3}$ menjadi sekitar $2{,}4 \times 10^{-7}$.

3. Tunjukkan bahwa untuk $p_n = p + c\lambda^n$ ($c \neq 0$, $\lambda \neq 0, 1$) berlaku $\hat{p}_n = p$ untuk semua n.

Kunci: $\Delta p_n = c\lambda^n(\lambda - 1)$ dan $\Delta^2 p_n = c\lambda^n(\lambda - 1)^2$. Maka $\frac{(\Delta p_n)^2}{\Delta^2 p_n} = c\lambda^n$ dan $\hat{p}_n = p + c\lambda^n - c\lambda^n = p$.

4. Mengapa memakai Aitken pada barisan yang sudah konvergen kuadratik biasanya tidak bermanfaat dan dapat merusak ketelitian?

Kunci: Selisih $p_{n+1} - p_n$ sudah sangat kecil sehingga $\Delta^2 p_n$ hampir sama dengan $-\Delta p_n$ yang dibagi dan dikurangi dalam bilangan hampir sama, sehingga galat pembulatan dominan; selain itu asumsi geometrik dengan rasio tetap tidak berlaku karena rasio galat menuju 0.

Steven Paulus Siahaan

2.6 Zeros of Polynomials and Müller's Method

Rujukan buku: halaman 91

Seksi ini mengkhususkan pencarian akar pada polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $a_n \neq 0$ (derajat n). Polinom istimewa karena strukturnya diketahui lengkap: banyak akarnya pasti, nilainya dan turunannya dapat dihitung murah, dan akar kompleks muncul secara teratur. Semua ini dimanfaatkan oleh dua alat utama seksi ini, metode Horner (evaluasi efisien dan deflasi) dan metode Müller (untuk akar kompleks).

Landasan teorinya adalah Teorema Dasar Aljabar: polinom berderajat $n \geq 1$ dengan koefisien real atau kompleks mempunyai paling sedikit satu akar, yang mungkin kompleks. Akibatnya, bila akar dihitung sesuai multiplisitasnya, polinom berderajat n mempunyai tepat n akar dan dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_k)^{m_k}$ dengan $\sum m_i = n$. Akibat lain, dua polinom berderajat paling tinggi n yang nilainya sama di lebih dari n titik berbeda pasti identik; fakta ini dipakai berkali-kali pada interpolasi dan aproksimasi. Untuk polinom berkoefisien real, akar kompleks selalu muncul berpasangan sekawan: bila $a + bi$ akar dengan multiplisitas m, maka $a - bi$ juga, dan $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)^m$ adalah faktor P.

Metode Horner didasarkan pada pembagian sintetik. Diberikan x_0, definisikan $b_n = a_n$ dan $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$ untuk $k = n-1, \ldots, 0$. Maka $b_0 = P(x_0)$, dan dengan $Q(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1$ berlaku $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$. Evaluasi ini hanya memerlukan n perkalian dan n penjumlahan, paling sedikit untuk bentuk umum. Dengan menurunkan identitas itu diperoleh $P'(x_0) = Q(x_0)$, sehingga turunan dapat dihitung dengan menerapkan Horner sekali lagi pada koefisien b_k. Itu berarti satu langkah metode Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$ untuk polinom dapat dilakukan dengan dua kali pembagian sintetik.

Setelah sebuah akar hampiran $\hat{x}_1$ ditemukan, $Q_1(x) = Q(x)$ dari Horner merupakan faktor hampiran, $P(x) \approx (x - \hat{x}_1)Q_1(x)$, dan akar lain dicari dari Q_1 yang derajatnya lebih rendah. Proses ini disebut deflasi. Dilakukan berulang sampai tersisa faktor kuadrat yang diselesaikan dengan rumus kuadrat. Kekurangannya: akar berikutnya hanya hampiran akar Q_k, bukan P, dan galat menumpuk makin besar seiring k. Penawarnya adalah memperhalus (polishing) setiap akar hampiran dengan beberapa iterasi Newton pada polinom asli P.

Masalah berikutnya: metode secant, posisi salah, dan Newton yang dimulai dari bilangan real tidak akan pernah menghasilkan bilangan kompleks, sehingga mustahil menemukan akar kompleks polinom real. Salah satu jalan keluarnya adalah mulai dari tebakan kompleks dan memakai aritmetika kompleks; jalan lain adalah metode Müller. Seperti secant yang memakai garis lewat dua titik kurva, Müller memakai parabola lewat tiga titik $(p_0, f(p_0)), (p_1, f(p_1)), (p_2, f(p_2))$, ditulis $a(x - p_2)^2 + b(x - p_2) + c$, dan akar parabola terdekat ke p_2 dijadikan p_3. Dengan notasi $h_1 = p_1 - p_0$, $h_2 = p_2 - p_1$, $\delta_1 = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{h_1}$, $\delta_2 = \frac{f(p_2) - f(p_1)}{h_2}$, $d = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2 + h_1}$ diperoleh $c = f(p_2)$, $a = d$, $b = \delta_2 + h_2 d$ dan $$ p_3 = p_2 - \frac{2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}. $$ Tanda akar dipilih sama dengan tanda b agar penyebut sebesar mungkin: ini menghindari pengurangan bilangan berdekatan dan memilih akar parabola yang paling dekat ke p_2. Karena $b^2 - 4ac$ dapat negatif, hasilnya bisa kompleks walau ketiga titik awal real. Setelah p_3 diperoleh, prosedur diulang dengan p_1, p_2, p_3. Dalam implementasi (Algoritma 2.8) tanda dipilih dengan membandingkan $|b - D|$ dan $|b + D|$ dengan $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ yang kompleks.

Ringkasnya: Horner untuk evaluasi, turunan, dan deflasi; Newton untuk menyempurnakan akar real; Müller untuk akar kompleks. Metode Müller tidak menjamin konvergensi dari tiga titik sembarang, tetapi umumnya konvergen dan lajunya lebih cepat daripada secant (orde

sekitar $1{,}84$) tanpa memerlukan turunan. Seksi ini menggunakan Newton (Seksi 2.3) dan secant, serta berkaitan dengan interpolasi polinom di Bab 3.

Konsep kunci

Teorema Dasar Aljabar — Polinom berderajat $n \geq 1$ dengan koefisien real/kompleks punya paling sedikit satu akar kompleks. Konsekuensinya, dengan multiplisitas, ada tepat n akar.

Faktorisasi dan multiplisitas — $P(x) = a_n \prod (x - x_i)^{m_i}$ dengan $\sum m_i = n$; himpunan akar dan multiplisitasnya tunggal.

Pasangan akar sekawan — Bila koefisien P real dan $a + bi$ akar, maka $a - bi$ juga akar dengan multiplisitas sama; $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ adalah faktor real.

Metode Horner (pembagian sintetik) — $b_n = a_n$, $b_k = a_k + b_{k+1} x_0$ memberi $b_0 = P(x_0)$ dan $P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$ dengan n perkalian dan n penjumlahan.

Turunan lewat Horner — $P'(x_0) = Q(x_0)$, sehingga $P(x_0)$ dan $P'(x_0)$ bisa dihitung dengan dua pembagian sintetik berturut-turut.

Deflasi — Setelah ditemukan satu akar hampiran, kerjakan polinom turunan Q yang derajatnya satu lebih rendah. Galat menumpuk; perhalus dengan Newton pada P asli.

Metode Müller — Mirip secant tetapi memakai parabola lewat tiga titik; dapat menghasilkan hampiran kompleks dari tebakan real karena $b^2 - 4ac$ bisa negatif.

Pemilihan tanda akar — Tanda di depan $\sqrt{b^2 - 4ac}$ dipilih agar penyebut $b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}$ bermagnitudo terbesar; ini menghindari pembatalan dan memilih akar parabola terdekat ke p_2.

Rekursi Horner

$$b_n = a_n, \qquad b_k = a_k + b_{k+1} x_0 \quad (k = n-1, \ \dots, 0), \qquad b_0 = P(x_0)$$

Pembagian sintetik

$$P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0, \qquad Q(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1, \qquad P'(x_0) = Q(x_0)$$

Newton dengan Horner

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k)} = x_k - \frac{b_0}{Q(x_k)}$$

Koefisien parabola Müller

$$c = f(p_2), \quad a = d = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2 + h_1}, \quad b = \delta_2 + h_2 d$$

Iterasi Müller

$$p_3 = p_2 - \frac{2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Algoritma: Müller

1. Masukkan tiga hampiran p_0, p_1, p_2, toleransi TOL, batas iterasi N_0. Hitung $h_1 = p_1 - p_0$, $h_2 = p_2 - p_1$, $\delta_1 = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{h_1}$, $\delta_2 = \frac{f(p_2) - f(p_1)}{h_2}$, $d = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2 + h_1}$; set $i = 3$.

2. Selama $i \le N_0$: hitung $b = \delta_2 + h_2 d$ dan $D = \sqrt{b^2 - 4f(p_2)d}$ (aritmetika kompleks bila perlu).
3. Jika $|b - D| < |b + D|$ ambil $E = b + D$, selain itu $E = b - D$ (penyebut dengan magnitudo terbesar).
4. Hitung $h = -\frac{2f(p_2)}{E}$ dan $p = p_2 + h$. Jika $|h| < TOL$, keluarkan p dan berhenti.
5. Perbarui $p_0 \leftarrow p_1$, $p_1 \leftarrow p_2$, $p_2 \leftarrow p$, hitung ulang $h_1, h_2, \delta_1, \delta_2, d$, dan set $i = i + 1$.
6. Bila N_0 iterasi habis, laporkan kegagalan.

Contoh 1: Horner dan Newton untuk $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 5$

Hitung $P(3)$ dan $P'(3)$ dengan pembagian sintetik, lalu lakukan Newton dari $x_0 = 3$ sampai x_4.

Penyelesaian.

Koefisien $1, -2, 0, 3, -5$ dan $x_0 = 3$:

$b_4 = 1$, $b_3 = -2 + 3 = 1$, $b_2 = 0 + 3 = 3$, $b_1 = 3 + 9 = 12$, $b_0 = -5 + 36 = 31$.

Jadi $P(3) = 31$ dan $Q(x) = x^3 + x^2 + 3x + 12$. Pembagian sintetik kedua pada $1, 1, 3, 12$: 1, $1 + 3 = 4$, $3 + 12 = 15$, $12 + 45 = 57$, sehingga $P'(3) = Q(3) = 57$. Cek langsung: $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3$, $P'(3) = 108 - 54 + 3 = 57$.

$$x_1 = 3 - \tfrac{31}{57} = 2{,}4561.$$

Langkah berikutnya (dengan kode yang sama): $x_2 = 2{,}1061$, $x_3 = 1{,}9382$, $x_4 = 1{,}9002$; dan akhirnya konvergen ke $1{,}89839$. Seluruh perhitungan polinom dan turunan memakai koefisien saja.

Contoh 2: Deflasi setelah satu akar ditemukan

Untuk polinom contoh sebelumnya, akar real hampiran $\hat{x}_1 = 1{,}89839$. Tentukan polinom turunan Q_1 dan akar-akar sisanya.

Penyelesaian.

Pembagian sintetik dengan $r = 1{,}8983903$ memberi $b_4 = 1$, $b_3 = -0{,}10161$, $b_2 = -0{,}19289$, $b_1 = 2{,}63381$, dan sisa $b_0 \approx -2{,}7 \times 10^{-10} \approx 0$.

Jadi $P(x) \approx (x - 1{,}89839)\,(x^3 - 0{,}10161x^2 - 0{,}19289x + 2{,}63381)$.

Akar kubik ini (dihitung numerik) adalah $-1{,}39339$ dan pasangan kompleks sekawan $0{,}74750 \pm 1{,}15389\,i$. Sesuai teorema, koefisien polinom real sehingga akar kompleks berpasangan. Karena akar-akar ini dicari dari Q_1 yang hanya hampiran, sebaiknya diperhalus dengan Newton atau Müller pada P asli.

Contoh 3: Satu langkah Müller pada $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$

Mulai dari $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Hitung p_3 dan komentari hasilnya.

Penyelesaian.

$f(0) = 3$, $f(1) = 7$, $f(2) = 19$. Maka $h_1 = h_2 = 1$, $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 12$, $d = \frac{12-4}{2} = 4$, $b = 12 + 1 \cdot 4 = 16$, dan $c = 19$.

$$b^2 - 4ac = 256 - 4(4)(19) = -48, \qquad D = \sqrt{-48} \approx 6{,}9282\,i.$$

Karena $|b - D| = |b + D|$, ambil $E = b - D = 16 - 6{,}9282\,i$. Maka $h = -\frac{2 \cdot 19}{E} = -\frac{38}{16 - 6{,}9282\,i} = -2 - 0{,}8660\,i$ dan $p_3 = p_2 + h = -0{,}8660\,i$. $

Tebakan awal real menghasilkan hampiran kompleks karena parabolanya tidak memotong sumbu-x. Iterasi dilanjutkan (dengan kode): $p_4 = -0{,}0465 - 1{,}2645\,i$, $p_5 = 0{,}0586 - 1{,}5626\,i$, $p_6 = 0{,}1405 - 1{,}5258\,i$, dan konvergen ke $0{,}137841 - 1{,}527312\,i$ dengan $|f| \approx 10^{-15}$. Pasangan sekawannya $0{,}137841 + 1{,}527312\,i$ dan akar real $-1{,}275682$ melengkapi tiga akar.

Kesalahan umum

• Memulai Newton/secant dari tebakan real lalu heran tidak pernah menemukan akar kompleks. Iterasi real dengan fungsi real tidak pernah keluar dari bilangan real; gunakan tebakan kompleks atau metode Müller.

• Lupa bahwa deflasi menumpuk galat. Akar yang diperoleh dari Q_k belum tentu akurat pada P; perhalus dengan Newton pada polinom asli.

• Salah menyusun tabel Horner: melewatkan koefisien nol (mis. x^3 yang hilang pada $x^4 + 3x - 5$ tetap harus ditulis sebagai 0) atau mencampur kolom saat menghitung $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$.

• Memilih tanda pada $b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ secara sembarang. Tanda yang salah menyebabkan pengurangan bilangan berdekatan (kehilangan ketelitian) dan memilih akar parabola yang jauh dari p_2.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $P'(x_0) = Q(x_0)$? Turunkan dari $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$ dan jelaskan manfaatnya bagi metode Newton pada polinom.
2. Mengapa deflasi cenderung kurang akurat untuk akar-akar yang dicari belakangan, dan strategi apa yang dapat mengurangi masalah itu?
3. Apa perbedaan prinsip antara metode secant dan metode Müller? Mengapa Müller dapat menghasilkan akar kompleks dari tebakan real sedangkan secant tidak?
4. Pada polinom real, mengapa cukup mencari akar kompleks yang bagian imajinernya positif saja?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Gunakan pembagian sintetik untuk menghitung $P(2)$ dan $P'(2)$ dengan $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 4$. Tulis juga $Q(x)$.

Kunci: Koefisien $2, -5, 1, 4$: $b = 2, \ -1, \ -1, \ 2$ sehingga $P(2) = 2$ dan $Q(x) = 2x^2 - x - 1$. $P'(2) = Q(2) = 8 - 2 - 1 = 5$; cek $P'(x) = 6x^2 - 10x + 1$, $P'(2) = 24 - 20 + 1 = 5$.

2. Polinom real berderajat 3 memiliki akar $1 + 2i$ dan 1. Tentukan polinom monik tersebut dan semua akarnya.

Kunci: Akar sekawan $1 - 2i$ juga akar; faktor kuadrat real $x^2 - 2x + 5$. Maka $P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 5) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ dengan akar 1 dan $1 \pm 2i$.

3. Berapa perkalian yang diperlukan untuk mengevaluasi polinom derajat 10 dengan Horner, dan dengan cara langsung (hitung pangkat x^k berulang kali, kalikan koefisien)?

Kunci: Horner: 10 perkalian (dan 10 penjumlahan). Langsung dengan pangkat bertahap: 9 perkalian untuk $x^2, \ \dots, x^{10}$ ditambah 10 perkalian koefisien, jadi 19 ($= 2n - 1$) perkalian, dengan jumlah penjumlahan yang sama.

4. Pada langkah Müller diperoleh $b = -3$, $a = 1$, $c = 2$. Tentukan penyebut yang dipilih dan $h = p_3 - p_2$.

Kunci: $b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$, akar $= 1$. Karena $b < 0$, penyebut $b + \text{sgn}(b)\sqrt{\cdot} = -3 - 1 = -4$ (magnitudo terbesar, dibanding $-3 + 1 = -2$). $h = -\frac{2c}{-4} = \frac{4}{4} = 1$. Akar parabola $at^2 + bt + c = 0$ (dengan $t = x - p_2$) adalah $t = 1$ dan $t = 2$; rumus memilih yang terdekat ke p_2, yaitu $t = 1$.

Pesan Utama

Ingat

Kecepatan ditukar dengan kepastian: bisection lambat tetapi pasti, Newton cepat tetapi bisa gagal bila tebakan awal buruk atau $f'(p) = 0$.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dibuat otomatis 07-11-2026.