MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 3

Interpolasi dan Hampiran Polinomial

Interpolation and Polynomial Approximation

Halaman buku 105 – 171 • 7 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Ringkasan Bab

Interpolasi mencari fungsi sederhana, biasanya polinomial, yang melalui titik-titik data. Bentuk Lagrange mudah dinyatakan, sedangkan bentuk Newton dengan beda terbagi lebih efisien ketika titik ditambah. Metode Neville menghitung nilai interpolasi tanpa membentuk polinomnya.

Interpolasi Hermite ikut memakai turunan di tiap titik. Untuk data banyak, polinom berderajat tinggi berosilasi, sehingga dipakai spline kubik: potongan kubik yang mulus (C^2) dan memerlukan penyelesaian sistem tridiagonal. Kurva parametrik (Bézier) memperluas gagasan ini ke bentuk di bidang.

Tujuan Pembelajaran

1. Membentuk polinom interpolasi Lagrange dan Newton serta menaksir galatnya.
2. Menyusun tabel beda terbagi dan menggunakan Neville.
3. Membangun spline kubik alami dan terjepit.
4. Menjelaskan mengapa interpolasi berderajat tinggi dapat berosilasi.

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
3.1	Interpolation and the Lagrange Polynomial	106	Teo. 3.1 (Weierstrass Approximation Theorem); Teo. 3.2; Teo. 3.3; 4 contoh
3.2	Data Approximation and Neville's Method	117	Def. 3.4; Teo. 3.5; 3 contoh
3.3	Divided Differences	124	Teo. 3.6; Def. 3.7; 2 contoh
3.4	Hermite Interpolation	136	Def. 3.8; Teo. 3.9; 2 contoh
3.5	Cubic Spline Interpolation	144	Def. 3.10; Teo. 3.11; Teo. 3.12; Teo. 3.13; 4 contoh
3.6	Parametric Curves	164	2 contoh
3.7	Survey of Methods and Software	171	–

Rumus dan Metode Kunci

Polinom Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x), \qquad L_{n,k}(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Galat interpolasi

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Beda terbagi

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \qquad f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Bentuk Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

Syarat spline kubik alami

$$S \in C^2[a, b], \quad S(x_j) = f(x_j), \quad S''(a) = S''(b) = 0$$

3.1 Interpolation and the Lagrange Polynomial

Rujukan buku: halaman 106

Masalah dasar bab ini: diberikan sejumlah titik data $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ dengan x_i berbeda, cari fungsi sederhana yang melalui semua titik itu, lalu pakai fungsi tersebut untuk menaksir nilai di titik lain. Kelas fungsi yang paling mudah dikerjakan adalah polinom. Alasan teoretisnya adalah Teorema Aproksimasi Weierstrass: untuk fungsi kontinu f pada $[a, b]$ dan toleransi $\varepsilon > 0$ selalu ada polinom P dengan $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ untuk semua x di $[a, b]$. Alasan praktisnya, polinom mudah dihitung, diturunkan, dan diintegralkan. Perlu dicatat bahwa deret Taylor bukan pilihan yang baik untuk keperluan ini: ia sangat akurat di dekat satu titik pusat, tetapi galatnya membesar di tempat yang jauh darinya, sedangkan interpolasi dirancang agar bagus pada seluruh selang yang memuat data.

Kasus paling sederhana adalah dua titik. Garis lurus yang melalui (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) dapat ditulis sebagai $P(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. Perhatikan strukturnya: setiap suku adalah nilai data dikalikan polinom yang bernilai 1 di satu simpul dan 0 di simpul lainnya. Gagasan ini diperumum menjadi polinom Lagrange. Untuk $n + 1$ simpul, didefinisikan polinom basis berderajat n

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0,\ i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Polinom basis ini bernilai 1 di x_k dan bernilai 0 di setiap simpul lain x_i dengan $i \neq k$. Karena itu polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x)$ memenuhi $P(x_j) = f(x_j)$ untuk setiap j dan berderajat paling tinggi n. Polinom ini tunggal: bila ada dua polinom berderajat paling tinggi n yang cocok di $n + 1$ simpul, selisihnya berderajat paling tinggi n tetapi memiliki $n + 1$ akar, sehingga selisih itu identik nol. Satu hal yang berguna untuk memeriksa hitungan: karena fungsi konstan 1 diinterpolasi tepat oleh dirinya sendiri, jumlah semua basis selalu $\sum_{k} L_{n,k}(x) = 1$ untuk setiap x.

Untuk menilai mutu hampiran kita perlu rumus galat. Misalkan $x_0, \ldots, x_n$ berbeda di $[a, b]$ dan $f \in C^{n+1}[a, b]$. Maka untuk tiap $x \in [a, b]$ ada $\xi(x)$ di dalam (a, b) sehingga

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Intuisinya diperoleh dengan membentuk fungsi pembantu yang memiliki $n + 2$ akar (simpul dan x itu sendiri), lalu menerapkan Teorema Rolle berulang kali sehingga turunan ke-$(n + 1)$ memiliki sebuah akar ξ. Rumus ini mirip suku sisa deret Taylor, tetapi faktor $(x - x_0) \cdots (x - x_n)$ menggantikan $(x - x_0)^{n+1}$. Titik $\xi(x)$ tidak diketahui, jadi yang dipakai dalam praktik adalah batas: $|f^{(n+1)}| \le M$ pada selang, sehingga galat tidak lebih dari $\frac{M}{(n+1)!} \left| \prod (x - x_i) \right|$. Dua kasus khusus penting adalah interpolasi linear dengan galat paling banyak $\frac{h^2}{8} \max |f''|$ untuk simpul berjarak h, serta kenyataan bahwa galat berukuran kecil bila x berada di tengah simpul-simpul dan membesar bila x jauh di luar simpul (ekstrapolasi).

Kelebihan polinom Lagrange adalah rumusnya eksplisit dan cocok untuk analisis teoretis, termasuk menurunkan rumus turunan dan integral numerik pada bab selanjutnya. Kekurangannya terasa dalam praktik. Pertama, menaikkan derajat berarti membuang semua perhitungan lama, sebab seluruh basis $L_{n,k}$ berubah ketika simpul ditambah. Kedua, untuk setiap titik evaluasi kita harus menghitung $O(n^2)$ operasi bila dilakukan naif. Ketiga, derajat yang tinggi tidak otomatis lebih baik: dengan simpul berjarak sama, polinom berderajat tinggi dapat berosilasi hebat di dekat ujung selang (fenomena Runge). Kekurangan pertama diatasi oleh metode Neville (seksi 3.2) dan beda terbagi Newton (seksi 3.3); fenomena Runge

Web by: Steven Paulus Siahaan

pada akhirnya mendorong pemakaian interpolasi sepotong-sepotong seperti spline kubik (seksi 3.5).

Konsep kunci

Teorema Aproksimasi Weierstrass — Setiap fungsi kontinu pada $[a, b]$ dapat didekati seragam oleh polinom dengan ketelitian sekecil apa pun. Ini membenarkan pemakaian polinom, tetapi tidak memberi cara membuatnya.

Polinom interpolasi — Polinom P berderajat paling tinggi n dengan $P(x_i) = f(x_i)$ untuk $n+1$ simpul berbeda. Polinom seperti ini ada dan tunggal.

Polinom basis Lagrange — $L_{n,k}(x)$ berderajat n, bernilai 1 di x_k dan 0 di simpul lain. Interpolan adalah kombinasi linear basis dengan koefisien $f(x_k)$.

Rumus galat interpolasi — Galat di x sama dengan $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_i (x - x_i)$ untuk suatu ξ dalam selang. Besarnya bergantung pada turunan fungsi dan letak x terhadap simpul.

Partisi satuan — Untuk setiap x berlaku $\sum_k L_{n,k}(x) = 1$. Sifat ini berguna untuk memeriksa hitungan tangan.

Interpolasi linear — Kasus $n = 1$: garis lurus melalui dua titik. Galatnya paling banyak $\frac{h^2}{8}\max|f''|$ dengan h jarak simpul.

Ekstrapolasi — Mengevaluasi interpolan di luar selang simpul. Faktor $\prod(x - x_i)$ cepat membesar sehingga hasilnya jauh kurang andal dibanding interpolasi.

Fenomena Runge — Pada simpul berjarak sama, menaikkan derajat dapat memperbesar osilasi dan galat di dekat ujung selang. Karena itu derajat tinggi bukan jaminan ketelitian.

Polinom basis Lagrange

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Polinom interpolasi Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_{n,k}(x)$$

Galat interpolasi

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Interpolasi linear

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, f(x_1)$$

Batas galat interpolasi linear

$$|f(x) - P_1(x)| \le \frac{h^2}{8} \max_{x_0 \le t \le x_1} |f''(t)|, \qquad h = x_1 - x_0$$

Algoritma: Evaluasi polinom interpolasi Lagrange di satu titik

1. Diberikan simpul $x_0, \ldots, x_n$ yang berbeda, nilai $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, dan titik evaluasi x.
2. Untuk setiap $k = 0, \ldots, n$, hitung $L_{n,k}(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ dengan mengalikan n pecahan.
3. Periksa hitungan: jumlah $\sum_k L_{n,k}(x)$ harus sama dengan 1 (dalam batas pembulatan).
4. Hitung $P(x) = \sum_k f(x_k) L_{n,k}(x)$.
5. Bila $f^{(n+1)}$ terbatas oleh M, taksir galat dengan $\frac{M}{(n+1)!} \left| \prod_i (x - x_i) \right|$.

Contoh 1: Interpolasi kuadratik untuk $f(x) = \ln(1+x)$

Dengan simpul $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3$ dan $f(x) = \ln(1+x)$, hitung hampiran $f(2)$ memakai polinom Lagrange berderajat dua, lalu bandingkan dengan nilai sebenarnya dan dengan batas galat teoretis.

Penyelesaian.

Nilai fungsi: $f(0) = 0,\ f(1) = 0{,}6931,\ f(3) = 1{,}3863$.

Basis di $x = 2$: $L_{2,0}(2) = \frac{(2-1)(2-3)}{(0-1)(0-3)} = -\frac{1}{3},\ L_{2,1}(2) = \frac{(2-0)(2-3)}{(1-0)(1-3)} = 1,$ $L_{2,2}(2) = \frac{(2-0)(2-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{3}$. Jumlahnya $-\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 1$, sesuai harapan.

$$P(2) = 0 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) + 0{,}6931 \cdot 1 + 1{,}3863 \cdot \tfrac{1}{3} = 1{,}1552$$

Nilai sebenarnya $\ln 3 = 1{,}0986$, sehingga galat sebenarnya $0{,}0566$.

Batas teoretis: $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ sehingga $|f'''| \le 2$ pada $[0, 3]$. Faktor simpul $|(2-0)(2-1)(2-3)| = 2$. Jadi galat $\le \frac{2}{3!} \cdot 2 = 0{,}6667$. Galat sebenarnya jauh di bawah batas ini; batasnya longgar karena memakai nilai maksimum f''' di ujung kiri selang.

Contoh 2: Interpolasi $\sin x$ di tiga simpul dengan batas galat

Interpolasikan $f(x) = \sin x$ pada simpul $0;\ 0{,}5;\ 1$ untuk menaksir $\sin(0{,}25)$, dan tentukan batas galatnya.

Penyelesaian.

Nilai: $\sin 0 = 0,\ \sin 0{,}5 = 0{,}4794,\ \sin 1 = 0{,}8415$.

Basis di $x = 0{,}25$: $L_{2,0} = \frac{(0{,}25-0{,}5)(0{,}25-1)}{(0-0{,}5)(0-1)} = 0{,}375,\ L_{2,1} = \frac{(0{,}25-0)(0{,}25-1)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)} = 0{,}750,$ $L_{2,2} = \frac{(0{,}25-0)(0{,}25-0{,}5)}{(1-0)(1-0{,}5)} = -0{,}125$. Jumlahnya 1.

$$P(0{,}25) = 0{,}750 \cdot 0{,}4794 + \ -0{,}125 \cdot 0{,}8415 = 0{,}2544$$

Nilai sebenarnya $\sin 0{,}25 = 0{,}2474$, galat sebenarnya $0{,}0070$.

Batas: $|f'''(x)| = |\cos x| \le 1$ dan $|(0{,}25)(0{,}25-0{,}5)(0{,}25-1)| = 0{,}046875$, maka galat $\le \frac{0{,}046875}{6} = 0{,}0078$. Galat sebenarnya ($0{,}0070$) memang berada di bawah batas ini.

Contoh 3: Jarak tabel yang diperlukan untuk interpolasi linear

Tabel $\cos x$ akan dipakai dengan interpolasi linear antar entri bertetangga. Berapa jarak maksimum h antar entri agar galat interpolasi tidak melebihi 5×10^{-7}?

Penyelesaian.

Untuk $f(x) = \cos x$ berlaku $|f''(x)| = |\cos x| \le 1$. Batas galat interpolasi linear adalah $\frac{h^2}{8} \cdot 1$. Syaratnya

$$\frac{h^2}{8} \le 5 \times 10^{-7} \;\Rightarrow\; h^2 \le 4 \times 10^{-6} \;\Rightarrow\; h \le 2 \times 10^{-3}$$

Jadi entri tabel boleh berjarak paling besar $0{,}002$ (sekitar $0{,}115$ derajat). Bila jarak ditambah dua kali lipat galat maksimum menjadi empat kali lipat, karena galat sebanding dengan h^2.

Kesalahan umum

• Mengira polinom interpolasi berderajat n selalu lebih baik bila n dinaikkan. Pada simpul berjarak sama, interpolan derajat tinggi bisa berosilasi hebat dekat ujung selang, sehingga galat justru membesar.

• Lupa bahwa $\xi(x)$ tidak diketahui, lalu mengganti $f^{(n+1)}(\xi)$ dengan nilai di satu titik tertentu. Yang benar adalah memakai batas atas M dari $|f^{(n+1)}|$ pada seluruh selang.

• Salah menghitung penyebut basis Lagrange: penyebut $L_{n,k}$ memakai $x_k - x_i$ (bukan $x - x_i$) dan tidak boleh memuat faktor $i = k$ yang memberi pembagian dengan nol.

• Memakai interpolan untuk ekstrapolasi tanpa curiga. Di luar selang simpul, hasil kali $\prod (x - x_i)$ tumbuh cepat dan batas galat menjadi sangat besar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa polinom interpolasi berderajat paling tinggi n melalui $n+1$ titik bersifat tunggal? Apa yang terjadi bila kita mengizinkan derajat lebih tinggi?
2. Rumus galat interpolasi mirip suku sisa Taylor. Apa perbedaan mendasar kedua hampiran dari segi lokasi ketelitiannya, dan kapan masing-masing lebih cocok?
3. Bila simpul boleh dipilih bebas, bagaimana Anda memilihnya agar faktor $\prod (x - x_i)$ sekecil mungkin pada selang? Mengapa simpul berjarak sama bukan pilihan terbaik?
4. Apa kerugian praktis rumus Lagrange saat satu simpul baru ditambahkan, dan gagasan apa yang dapat mengatasinya?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Dengan simpul $x = 1, 4, 9$ dan $f(x) = \sqrt{x}$, hitung hampiran $\sqrt{5}$ memakai interpolasi Lagrange berderajat dua.

Kunci: Basis di $x = 5$: $L_0 = \frac{(5-4)(5-9)}{(1-4)(1-9)} = -\frac{1}{6}$, $L_1 = \frac{(5-1)(5-9)}{(4-1)(4-9)} = \frac{16}{15}$, $L_2 = \frac{(5-1)(5-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{1}{10}$. Maka $P(5) = -\frac{1}{6} + \frac{32}{15} + \frac{3}{10} = \frac{34}{15} \approx 2{,}2667$, sedangkan $\sqrt{5} = 2{,}2361$.

2. Untuk simpul $0,\ 2,\ 5$, hitung $L_{2,0}(3)$, $L_{2,1}(3)$, $L_{2,2}(3)$ dan periksa bahwa jumlahnya 1.

Kunci: $L_{2,0}(3) = \frac{(3-2)(3-5)}{(0-2)(0-5)} = -0{,}2$, $L_{2,1}(3) = \frac{(3-0)(3-5)}{(2-0)(2-5)} = 1$, $L_{2,2}(3) = \frac{(3-0)(3-2)}{(5-0)(5-2)} = 0{,}2$. Jumlah $= 1$.

3. Hampiri $e^{0{,}25}$ dengan interpolasi linear antara $x = 0$ dan $x = 0{,}5$, lalu bandingkan galat sebenarnya dengan batas $\frac{h^2}{8}\max|f''|$.

Kunci: $P_1(0{,}25) = \frac{1+e^{0{,}5}}{2} = 1{,}3244$. Nilai sebenarnya $e^{0{,}25} = 1{,}2840$, galat $0{,}0403$. Batas: $\frac{0{,}25}{8}e^{0{,}5} = 0{,}0515$, jadi galat berada di bawah batas.

4. Sebuah tabel $\sin x$ berjarak h dipakai dengan interpolasi linear. Tentukan h terbesar agar galat $\leq 10^{-4}$.

Kunci: $|f''| = |\sin x| \leq 1$, maka $\frac{h^2}{8} \leq 10^{-4} \Rightarrow h^2 \leq 8 \times 10^{-4} \Rightarrow h \leq 0{,}0283$ (kira-kira $0{,}028$).

Web by: Steven Paulus Siahaan

3.2 Data Approximation and Neville's Method

Rujukan buku: halaman 117

Pada Seksi 3.1 kita mengenal polinom interpolasi Lagrange beserta rumus galatnya. Dalam praktik, rumus galat itu jarang dapat dipakai karena memerlukan turunan tingkat tinggi $f^{(n+1)}$ yang tidak diketahui, apalagi bila data hanya berupa tabel dari percobaan. Akibatnya derajat polinom yang cukup untuk ketelitian tertentu baru diketahui setelah beberapa polinom dihitung dan hasilnya dibandingkan. Masalahnya, bentuk Lagrange tidak ramah terhadap cara kerja seperti ini: bila kita menaikkan derajat dengan menambah satu simpul, seluruh polinom basis harus dihitung ulang dan kerja sebelumnya terbuang.

Metode Neville menyelesaikan masalah itu. Metode ini tidak membentuk polinomnya, melainkan menghitung nilainya pada satu titik x tertentu secara rekursif, dengan memakai ulang hasil polinom derajat lebih rendah. Notasi dasarnya: $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ adalah polinom Lagrange yang berimpit dengan f pada simpul-simpul $x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}$. Contohnya $P_{1,2,4}$ adalah polinom derajat dua yang melalui simpul x_1, x_2, x_4.

Kunci metode ini adalah teorema rekursi: bila x_i dan x_j dua simpul berbeda dari himpunan $\{x_0, \ldots, x_k\}$, maka polinom interpolasi pada seluruh $k+1$ simpul adalah kombinasi dua polinom yang masing-masing meninggalkan satu simpul,

$$P(x) = \frac{(x - x_j)\, P_{0,\ldots,\hat{j},\ldots,k}(x) - (x - x_i)\, P_{0,\ldots,\hat{i},\ldots,k}(x)}{x_i - x_j}$$

dengan topi menandai simpul yang dilewati. Buktinya singkat: ruas kanan berderajat paling banyak k; di x_i suku kedua lenyap dan polinom pertama (yang memuat x_i) bernilai $f(x_i)$; di x_j sebaliknya; di simpul lain kedua polinom bernilai $f(x_r)$ sehingga pembilangnya menjadi $(x_i - x_j) f(x_r)$. Karena polinom interpolasi derajat $\le k$ pada $k+1$ simpul itu tunggal, hasilnya pasti polinom yang dicari.

Untuk implementasi, pakai notasi tabel $Q_{i,j} = P_{i-j,\, i-j+1,\, \ldots,\, i}$, yaitu polinom derajat j yang memakai $j+1$ simpul berurutan yang berakhir di x_i. Kolom pertama diisi $Q_{i,0} = f(x_i)$, dan sisanya dengan rekursi $Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j}) Q_{i,j-1} - (x - x_i) Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$. Tabel berbentuk segitiga bawah, dan setiap entri hanya bergantung pada entri di sebelah kiri dan kiri-atasnya. Entri diagonal $Q_{n,n} = P_{0,1,\ldots,n}(x)$ adalah nilai polinom interpolasi penuh.

Manfaat praktisnya: urutan nilai diagonal $Q_{0,0}, Q_{1,1}, Q_{2,2}, \ldots$ memperlihatkan bagaimana taksiran berubah ketika derajat dinaikkan. Kita berhenti bila $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}|$ sudah cukup kecil. Ini bukan jaminan galat, hanya indikator yang masuk akal bila fungsinya mulus dan simpul dipilih baik. Simpul sebaiknya diurutkan dari yang terdekat dengan x agar polinom-polinom awal sudah merupakan hampiran bagus. Menambah satu simpul baru hanya menambah satu baris tabel.

Kekurangannya: metode ini hanya menghasilkan nilai pada satu titik. Jika kita memerlukan polinomnya sendiri, misalnya untuk dievaluasi di banyak titik, bentuk beda terbagi Newton pada Seksi 3.3 lebih tepat. Biaya satu tabel Neville dengan $n+1$ simpul adalah sekitar n^2 operasi, sama dengan biaya menyusun tabel beda terbagi.

Konsep kunci

Notasi $P_{m_1, \ldots, m_k}$ — Polinom Lagrange yang berimpit dengan f hanya pada simpul-simpul $x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}$ yang disebut. Derajatnya paling tinggi $k-1$.

Rekursi Neville — Polinom pada $k+1$ simpul diperoleh dari dua polinom pada k simpul yang masing-masing melewatkan satu simpul, digabung dengan bobot linear dalam x.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Tabel $Q_{i,j}$ — Penyajian rekursi sebagai segitiga bawah: $Q_{i,j}$ memakai simpul $x_{i-j}, \ldots, x_i$. Diagonalnya memuat taksiran dengan derajat yang makin tinggi.

Kriteria berhenti pada diagonal — Iterasi dihentikan bila $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}|$ kurang dari toleransi. Ini indikator praktis, bukan batas galat yang terjamin.

Pengurutan simpul — Simpul sebaiknya diurutkan menurut jarak ke titik evaluasi, sehingga taksiran awal sudah baik dan konvergensi diagonal tampak lebih cepat.

Evaluasi di satu titik — Neville memberi nilai polinom di satu x tanpa membentuk koefisiennya; untuk banyak titik, bentuk Newton lebih efisien.

Rekursi Neville umum

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{x_i - x_j}$$

Nilai awal tabel

$$Q_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Rekursi tabel Neville

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})\,Q_{i,j-1} - (x - x_i)\,Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}, \quad 1 \le j \le i$$

Arti entri tabel

$$Q_{i,j} = P_{i-j,\ i-j+1,\ldots,i}(x)$$

Kriteria berhenti

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$$

Algoritma: Interpolasi iterasi Neville

1. Masukkan simpul $x_0, \ldots, x_n$ (sebaiknya terurut menurut jarak ke x), nilai $f(x_0), \ldots, f(x_n)$, dan titik evaluasi x.
2. Isi kolom pertama: $Q_{i,0} = f(x_i)$ untuk $i = 0, \ldots, n$.
3. Untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, \ldots, i$ hitung $Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$.
4. Setelah baris i selesai, periksa $|Q_{i,i} - Q_{i-1,i-1}| < \varepsilon$; bila ya, berhenti dan laporkan $Q_{i,i}$.
5. Jika semua simpul terpakai, keluarkan $Q_{n,n}$ sebagai nilai $P_{0,\ldots,n}(x)$.

Contoh 1: Tabel Neville untuk $\ln x$ di $x = 2{,}5$

Hitung $Q_{i,j}$ untuk $x = 2{,}5$ dengan data $f(x) = \ln x$ di $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4$.

Penyelesaian.

Nilai awal $Q_{i,0} = \ln x_i$: $Q_{0,0} = 0{,}0000$, $Q_{1,0} = 0{,}6931$, $Q_{2,0} = 1{,}0986$, $Q_{3,0} = 1{,}3863$.

Baris $i = 1$: $Q_{1,1} = 1{,}0397$.

Baris $i = 2$: $Q_{2,1} = 0{,}8959$, $Q_{2,2} = 0{,}9318$.

Baris $i=3$: $Q_{3,1}=0{,}9548$, $Q_{3,2}=0{,}9106$, $Q_{3,3}=0{,}9212$.

Contoh satu perhitungan: $Q_{1,1}=\frac{(2{,}5-1)Q_{1,0}-(2{,}5-2)Q_{0,0}}{2-1}=\frac{1{,}5\cdot 0{,}6931-0{,}5\cdot 0}{1}=1{,}0397$.

Taksiran terbaik adalah $Q_{3,3}=0{,}9212$, sedangkan nilai sebenarnya $\ln 2{,}5=0{,}9163$, sehingga galat mutlaknya sekitar $0{,}0049$.

Contoh 2: Menghentikan Neville dengan kriteria diagonal

Gunakan data $f(x)=\sin x$ pada $x_i=0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ 1{,}1;\ 1{,}4$ untuk menaksir $f(0{,}6)$ dengan metode Neville, dan hentikan bila dua nilai diagonal berurutan selisihnya kurang dari 2×10^{-4}.

Penyelesaian.

Diagonal tabel Neville: $Q_{0,0}=0{,}198669$, $Q_{1,1}=0{,}573011$, $Q_{2,2}=0{,}563494$, $Q_{3,3}=0{,}564544$, $Q_{4,4}=0{,}564661$.

$|Q_{1,1}-Q_{0,0}|=0{,}374342$.

$|Q_{2,2}-Q_{1,1}|=0{,}009517$.

$|Q_{3,3}-Q_{2,2}|=0{,}001050$.

$|Q_{4,4}-Q_{3,3}|=0{,}000118$.

Selisih pertama yang lebih kecil dari 2×10^{-4} muncul pada $i=4$, jadi kita berhenti dan menerima $Q_{4,4}=0{,}564661$. Nilai sebenarnya $\sin 0{,}6=0{,}564642$; galat sebenarnya $0{,}0000190$.

Contoh 3: Pengaruh urutan simpul

Taksir $\sqrt{5{,}3}$ dengan metode Neville memakai simpul $4,5,6,7$. Bandingkan bila simpul diurutkan dari yang terdekat dengan $5{,}3$ (yaitu $5,6,4,7$).

Penyelesaian.

Urutan $4,5,6,7$: diagonal
$Q_{0,0}=2{,}0000,\ Q_{1,1}=2{,}306888,\ Q_{2,2}=2{,}302472,\ Q_{3,3}=2{,}302223$.

Urutan $5,6,4,7$: diagonal
$Q_{0,0}=2{,}236068,\ Q_{1,1}=2{,}300095,\ Q_{2,2}=2{,}302472,\ Q_{3,3}=2{,}302223$.

Nilai sebenarnya $\sqrt{5{,}3}=2{,}302173$. Hasil akhir $Q_{3,3}$ sama pada kedua urutan (polinomnya sama), tetapi pada urutan kedua nilai-nilai diagonal awal sudah lebih dekat ke nilai sebenarnya (galat $Q_{1,1}$: $0{,}002078$ dibanding $0{,}004715$), sehingga kriteria berhenti dapat terpenuhi lebih awal.

Kesalahan umum

• Mengira Neville menghasilkan polinomnya. Metode ini hanya memberi nilai polinom di satu titik x; untuk polinom itu sendiri gunakan beda terbagi.

• Salah indeks pada rekursi: pembagi adalah $x_i - x_{i-j}$ dan pembilang memakai $Q_{i,\,j-1}$ dengan faktor $(x - x_{i-j})$, bukan sebaliknya. Cara mengeceknya: bila =1 $dan = x_i$, rekursi harus mengembalikan (x_i)$.

• Menganggap selisih diagonal yang kecil menjamin galat kecil. Pada fungsi yang berosilasi atau simpul yang jelek, dua taksiran berurutan bisa berdekatan namun keduanya jauh dari nilai sebenarnya.

• Memakai simpul yang jauh dari x (ekstrapolasi) lalu mempercayai hasilnya. Polinom interpolasi bisa menyimpang cepat di luar selang simpul.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa rumus galat Lagrange sulit dipakai bila yang diketahui hanya data tabel, dan bagaimana Neville mengatasinya secara praktis?
2. Mengapa $Q_{n,\,n}$ tidak bergantung pada urutan simpul, padahal nilai $Q_{i,\,i}$ yang lebih kecil bergantung padanya?
3. Bandingkan biaya komputasi Neville dengan membentuk polinom Lagrange baru setiap kali satu simpul ditambah.
4. Dalam kondisi apa Neville dan beda terbagi Newton lebih cocok masing-masing?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Dengan data $(0, 1), (1, 3), (2, 7)$, hitung $Q_{2,\,2}$ pada $x = 1{,}5$ memakai metode Neville.

Kunci: Tabel: $Q_{1,\,1} = 4{,}00$, $Q_{2,\,1} = 5{,}00$, $Q_{2,\,2} = 4{,}75$. Datanya dari $x^2 + x + 1$, sehingga hasilnya tepat: $1{,}5^2 + 1{,}5 + 1 = 4{,}75$.

2. Data $f(x) = x^3$ di $x = 1, 2, 4, 5$ (nilai $1, 8, 64, 125$). Hitung $Q_{3,\,3}$ untuk $x = 3$ dan jelaskan mengapa hasilnya tepat.

Kunci: $Q_{3,\,3} = 27{,}00$. Empat simpul menentukan polinom derajat ≤ 3 secara tunggal, dan x^3 sendiri berderajat 3, maka interpolasinya persis x^3 dan $3^3 = 27$.

3. Buktikan bahwa untuk $x = x_i$ rumus Neville menghasilkan $P(x_i) = f(x_i)$, memakai Q dan $\hat{Q}$ seperti pada teorema rekursi.

Kunci: Misalkan $\hat{Q} = P_{0,\,\ldots,\,\hat{i},\,\ldots,\,k}$ memuat x_i, maka $\hat{Q}(x_i) = f(x_i)$. Suku dengan faktor $(x_i - x_i)$ lenyap, sehingga $P(x_i) = \frac{(x_i - x_j)\,f(x_i)}{x_i - x_j} = f(x_i)$.

Steven Paulus Siahaan

3.3 Divided Differences

Rujukan buku: halaman 124

Seksi 3.2 menghasilkan nilai polinom interpolasi di satu titik. Di sini kita ingin polinomnya sendiri, dalam bentuk yang mudah diperbarui bila titik data bertambah. Bentuk Lagrange kurang cocok: menambah satu simpul mengubah semua basis. Bentuk Newton menjawabnya dengan menyusun polinom sebagai deret suku bertingkat,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Koefisiennya mudah dicari berurutan dari syarat interpolasi. Di x_0 semua suku kecuali pertama hilang, jadi $a_0 = f(x_0)$. Di x_1 hanya dua suku pertama yang hidup, sehingga $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Pola ini berlanjut: a_k ditentukan oleh nilai f di $x_0, \ldots, x_k$ saja. Karena itulah menambah simpul x_{n+1} hanya menambah satu suku di ujung, tanpa mengubah koefisien yang sudah ada.

Koefisien itu adalah beda terbagi (divided difference). Definisinya rekursif: $f[x_i] = f(x_i)$ dan

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Maka $a_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ dan $P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$. Beda terbagi disusun dalam tabel segitiga: kolom pertama nilai fungsi, kolom berikutnya selisih dua entri bersebelahan di kolom sebelumnya dibagi selisih simpul terluarnya. Polinom Newton memakai entri sepanjang sisi atas tabel (diagonal), dan biaya menyusun tabel sekitar n^2 operasi, lalu evaluasi dengan skema Horner bersarang hanya n perkalian.

Beberapa sifat penting. Pertama, beda terbagi simetris terhadap urutan simpul, karena polinom interpolasi tunggal dan $f[x_0, \ldots, x_k]$ adalah koefisien pangkat tertinggi polinom interpolasi pada simpul-simpul itu. Kedua, bila $f \in C^n[a, b]$ dan simpul berbeda, maka terdapat ξ di antara simpul terkecil dan terbesar dengan $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Ini menghubungkan beda terbagi dengan turunan dan menjelaskan mengapa beda terbagi tingkat n dari polinom berderajat n bernilai tetap. Ketiga, galat interpolasi dapat ditulis $f(x) - P_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, dan bila turunan ada, ini sama dengan bentuk Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$. Besaran $f[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ dari data yang ada dapat dipakai sebagai taksiran ukuran suku berikutnya.

Bila simpul berjarak sama, $x_i = x_0 + ih$, beda terbagi dapat dinyatakan dengan beda hingga. Beda maju $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ (dengan Δ^k secara rekursif) memenuhi $f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}$. Dengan $x = x_0 + sh$, polinom maju Newton adalah $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0$, dengan $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$. Versi mundur memakai $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ dan titik acuan x_n, dengan $x = x_n + sh$ dan $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n$. Rumus maju cocok untuk x dekat awal tabel, rumus mundur untuk x dekat akhir.

Jadi polinom Newton, Lagrange, dan Neville semuanya merepresentasikan polinom yang sama; perbedaannya hanya pada cara menghitung. Newton unggul bila data bertambah bertahap atau polinom perlu dievaluasi di banyak titik. Beda terbagi juga menjadi dasar interpolasi Hermite pada Seksi 3.4, dengan simpul yang boleh berulang.

Konsep kunci

Bentuk Newton — Polinom interpolasi ditulis sebagai $\sum a_k \prod_{i<k} (x - x_i)$. Menambah simpul baru hanya menambah satu suku.

Beda terbagi — $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ didefinisikan rekursif sebagai selisih dua beda terbagi tingkat $k-1$ dibagi selisih simpul terluar. Nilainya koefisien pangkat tertinggi polinom interpolasi pada simpul-simpul itu.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Simetri beda terbagi — Nilai $f[x_0, \ldots, x_k]$ tidak berubah bila urutan simpul ditukar, sehingga tabel dapat dibangun dari simpul dalam urutan apa pun.

Hubungan dengan turunan — Jika $f \in C^n$, maka $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ untuk suatu ξ di antara simpul. Beda terbagi tingkat n dari polinom derajat n adalah konstanta.

Galat bentuk beda terbagi — $f(x) - P_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod (x - x_i)$. Memakai satu titik data tambahan menaksir ukuran galat.

Beda maju dan mundur — Untuk simpul berjarak sama, $f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}$; rumus maju dan mundur Newton memakai $s = \frac{x - x_0}{h}$ atau $s = \frac{x - x_n}{h}$.

Bentuk Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k]\,(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})$$

Rekursi beda terbagi

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Teorema nilai rata-rata beda terbagi

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad \xi \in (\min x_i, \max x_i)$$

Galat interpolasi

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Rumus maju Newton (simpul seragam)

$$P_n(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0, \qquad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

Rumus mundur Newton

$$P_n(x_n + sh) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n$$

Algoritma: Koefisien beda terbagi Newton

1. Masukkan simpul berbeda $x_0, \ldots, x_n$ dan nilai $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ sebagai $F_{i,0} = f(x_i)$.
2. Untuk $i = 1, \ldots, n$ dan $j = 1, \ldots, i$ hitung $F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$. Di sini $F_{i,j} = f[x_{i-j}, \ldots, x_i]$.
3. Keluarkan koefisien diagonal $a_i = F_{i,i} = f[x_0, \ldots, x_i]$ untuk $i = 0, \ldots, n$.
4. Evaluasi $P_n(x)$ dengan skema bersarang: $p \leftarrow a_n$, lalu untuk $k = n-1, \ldots, 0$ ganti $p \leftarrow a_k + (x - x_k)\,p$.
5. Untuk menambah simpul x_{n+1}, hitung hanya baris baru $F_{n+1,0}, \ldots, F_{n+1,n+1}$ dan tambahkan suku $a_{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$.

Contoh 1: Tabel beda terbagi untuk $\ln x$

Bentuk tabel beda terbagi untuk $f(x) = \ln x$ pada $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$, tulis polinom Newton, dan taksir $\ln 3$.

Penyelesaian.

Beda terbagi pertama: $f[x_0, x_1] = 0{,}693147$, $f[x_1, x_2] = 0{,}346574$, $f[x_2, x_3] = 0{,}223144$.

Beda terbagi kedua: $f[x_0, x_1, x_2] = -0{,}115525$, $f[x_1, x_2, x_3] = -0{,}041143$.

Beda terbagi ketiga: $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0{,}018595$.

Contoh hitungan: $f[x_1, x_2] = \frac{\ln 4 - \ln 2}{4 - 2} = 0{,}346574$ dan $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{0{,}346574 - 0{,}693147}{3} = -0{,}115525$.

Koefisien Newton adalah diagonal tabel, sehingga

$$P_3(x) = 0{,}693147(x-1) - 0{,}115525(x-1)(x-2) + 0{,}018595(x-1)(x-2)(x-4)$$

Pada $x = 3$: $P_3(3) = 1{,}118055$, sedangkan $\ln 3 = 1{,}098612$; galatnya $0{,}019442$.

Contoh 2: Menambah satu simpul

Pada Contoh 1 tambahkan data baru $x_4 = 7$. Perbarui polinomnya menjadi P_4 tanpa mengulang hitungan lama, dan taksir kembali $\ln 3$.

Penyelesaian.

Hanya baris terbawah tabel yang baru: $f[x_3, x_4] = 0{,}168236$, $f[x_2, \ldots, x_4] = -0{,}018302$, $f[x_1, \ldots, x_4] = 0{,}004568$, $f[x_0, \ldots, x_4] = -0{,}002338$.

Koefisien baru: $f[x_0, \ldots, x_4] = -0{,}002338$. Koefisien lama $f[x_0], \ldots, f[x_0, \ldots, x_3]$ tidak berubah, maka

$$P_4(x) = P_3(x) + (-0{,}002338)(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$$

Suku tambahan di $x = 3$ adalah $-0{,}009351$, jadi $P_4(3) = 1{,}108703$ dengan galat $0{,}010091$ (sebelumnya $0{,}019442$).

Contoh 3: Rumus maju untuk simpul seragam

Data $f(x) = \sin x$ diberikan pada $x_i = 0{,}2 + 0{,}1\,i$, $i = 0, \ldots, 4$. Pakai rumus maju Newton-Gregory untuk menaksir $\sin 0{,}27$.

Penyelesaian.

Beda maju $\Delta^k f_0$: $\Delta^0 f_0 = 0{,}198669$, $\Delta^1 f_0 = 0{,}096851$, $\Delta^2 f_0 = -0{,}002953$, $\Delta^3 f_0 = -0{,}000938$, $\Delta^4 f_0 = 0{,}000039$.

Dengan $s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0{,}27 - 0{,}2}{0{,}1} = 0{,}7$, rumusnya $P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} \Delta^k f_0$.

Hasilnya $P_4(0{,}27) = 0{,}2667313$, sedangkan $\sin 0{,}27 = 0{,}2667314$ (galat $0{,}0000002$).

Kesalahan umum

• Membagi dengan selisih simpul yang salah. Pada tingkat k pembaginya $x_{i+k} - x_i$ (simpul terluar), bukan selisih dua simpul bersebelahan.

• Mengira koefisien Newton diambil dari kolom, bukan diagonal atas tabel. Polinom memakai $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]$, yaitu entri yang melibatkan x_0 sebagai simpul pertama.

• Menggunakan rumus maju/mundur Newton untuk simpul yang tidak seragam. Rumus beda hingga hanya berlaku bila jarak antarsimpul tetap h.

• Lupa bahwa s bukan bilangan bulat umumnya, dan salah mengevaluasi $\binom{s}{k}$ sebagai koefisien binomial bilangan bulat; ia adalah hasil kali $s(s-1)\cdots(s-k+1)$ dibagi $k!$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa menambah satu simpul pada bentuk Newton hanya menambah satu suku, sedangkan pada bentuk Lagrange semua basis berubah?
2. Mengapa nilai beda terbagi tidak bergantung pada urutan simpul, padahal tabelnya disusun dengan urutan tertentu?
3. Jelaskan hubungan $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ dengan fakta bahwa polinom derajat n memiliki beda terbagi tingkat n konstan.
4. Kapan Anda memilih rumus maju, rumus mundur, atau beda terbagi umum?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $f(x) = x^3 - 2x$ pada simpul $0, 1, 2, 3$, hitung semua beda terbagi sampai tingkat tiga dan tulis P_3.

Kunci: f = 0, -1, 4, 21. Beda terbagi pertama: -1, 5, 17; kedua: 3, 6; ketiga: 1 (sama dengan koefisien x^3). $P_3(x) = 0 - 1x + 3x(x-1) + 1\,x(x-1)(x-2)$, yang sama dengan $x^3 - 2x$.

2. Dengan data $(0, 1), (1, 4), (3, 28)$ tentukan polinom Newton P_2 dan hitung $P_2(2)$.

Kunci: $f[x_0, x_1] = 3$, $f[x_1, x_2] = 12$, $f[x_0, x_1, x_2] = 3$. $P_2(x) = 1 + 3x + 3\,x(x-1)$, sehingga $P_2(2) = 13$.

3. Sebuah tabel dengan $h = 0{,}5$ memiliki beda maju ketiga yang konstan bernilai 3. Berapa beda terbagi $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, dan berapa f''' jika f kubik?

Kunci: $f[x_0, \ldots, x_3] = \frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3} = \frac{3}{6 \cdot 0{,}125} = 4$. Untuk kubik $f[x_0, \ldots, x_3] = \frac{f'''}{3!}$, maka $f''' = 24$ dan koefisien x^3 adalah 4.

Paulus Siahaan

3.4 Hermite Interpolation

Rujukan buku: halaman 136

Interpolasi Lagrange hanya memakai nilai fungsi. Dalam banyak masalah kita juga mengetahui turunan di simpul: posisi sekaligus kecepatan, atau suhu sekaligus laju perubahannya. Interpolasi Hermite memanfaatkan informasi tambahan itu agar kurva hampiran tidak hanya melewati titik data tetapi juga bersinggungan dengan arah yang benar.

Masalahnya: diberikan simpul berbeda $x_0, \ldots, x_n$, nilai $f(x_i)$, dan turunan $f'(x_i)$, cari polinom H yang memenuhi $H(x_i) = f(x_i)$ dan $H'(x_i) = f'(x_i)$ untuk semua i. Ada $2n+2$ syarat, sehingga wajar mencari polinom berderajat paling tinggi $2n+1$. Polinom seperti itu ada dan tunggal. Ketunggalan terlihat dari selisih dua polinom yang memenuhi syarat sama: ia berderajat $\leq 2n+1$ tetapi memiliki akar ganda di tiap x_i, jadi memiliki setidaknya $2n+2$ akar (dihitung dengan kelipatan), sehingga harus nol.

Bentuk eksplisit memakai polinom basis Lagrange $L_{n,j}$:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\, \hat{H}_{n,j}(x),$$

dengan $H_{n,j}(x) = \big[1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)\big] L_{n,j}(x)^2$ dan $\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)\, L_{n,j}(x)^2$. Kuadrat $L_{n,j}^2$ membuat basis bernilai nol beserta turunannya di semua simpul selain x_j. Di x_j sendiri, $H_{n,j}$ bernilai 1 dengan turunan 0, sedangkan $\hat{H}_{n,j}$ bernilai 0 dengan turunan 1. Bentuk ini jarang dipakai untuk hitungan karena perlu $L'_{n,j}(x_j)$.

Cara yang praktis memakai beda terbagi Newton dengan simpul ganda. Definisikan barisan $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$. Beda terbagi pada simpul yang sama didefinisikan sebagai batasnya, yaitu turunan: $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$. Selebihnya rumus rekursi beda terbagi biasa dipakai, dan $H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)\cdots(x - z_{k-1})$. Konstruksinya sama persis dengan Seksi 3.3, hanya baris-baris kolom kedua yang berasal dari simpul kembar diisi dengan turunan, bukan dihitung dengan pembagian.

Galatnya, bila $f \in C^{2n+2}[a,b]$, ada $\xi(x)$ sehingga $f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$. Faktor kuadrat memperlihatkan bahwa galat menjadi lebih kecil di sekitar simpul, dan derajat turunan yang dibutuhkan lebih tinggi dibanding Lagrange pada banyak simpul yang sama. Karena ada $2n+2$ syarat, galat Hermite dengan $n+1$ simpul setara dengan galat Lagrange derajat $2n+1$ dengan simpul-simpul yang dilipatgandakan.

Kelebihan: ketelitian tinggi untuk jumlah simpul sedikit, dan kurva bersinggungan dengan data kemiringan. Kekurangan: butuh turunan yang diketahui, yang sering tidak tersedia dalam data pengukuran. Polinom berderajat tinggi juga cenderung berosilasi bila simpulnya banyak. Karena itu pada praktiknya orang memakai Hermite kubik per selang sebagai potongan-potongan. Gagasan itu menjadi dasar spline kubik (Seksi 3.5), yang tidak memerlukan turunan di simpul, dan kurva parametrik (Seksi 3.6).

Konsep kunci

Masalah Hermite — Mencari polinom yang cocok dengan nilai fungsi dan turunan pertama di setiap simpul. Dengan $n+1$ simpul diperoleh $2n+2$ syarat.

Derajat dan ketunggalan — Polinom Hermite berderajat paling tinggi $2n+1$ dan tunggal; selisih dua kandidat memiliki $2n+2$ akar terhitung kelipatan.

Basis Hermite $H_{n,j}$ dan $\hat{H}_{n,j}$ — Dibangun dari kuadrat polinom Lagrange: $H_{n,j}$ membawa nilai fungsi dan $\hat{H}_{n,j}$ membawa nilai turunan di x_j.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Simpul ganda — Barisan $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ dipakai pada tabel beda terbagi; beda terbagi dua simpul kembar sama dengan $f'(x_i)$.

Galat Hermite — $\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod(x-x_i)^2$. Bentuknya mirip galat Lagrange derajat $2n+1$ dengan setiap simpul muncul dua kali.

Hermite kubik — Kasus $n=1$: dua simpul dan dua turunan menghasilkan polinom derajat tiga. Dipakai per selang sebagai potongan kurva mulus.

Polinom Hermite dengan basis

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

Basis Hermite

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right] L_{n,j}^2(x)$$

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L_{n,j}^2(x)$$

Simpul ganda

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \quad f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$$

Bentuk Newton Hermite

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0)\cdots(x - z_{k-1})$$

Galat Hermite

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$$

Algoritma: Interpolasi Hermite dengan beda terbagi

1. Masukkan simpul $x_0, \ldots, x_n$, nilai $f(x_i)$, dan turunan $f'(x_i)$.
2. Bentuk $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ dan isi kolom pertama $Q_{2i,0} = Q_{2i+1,0} = f(x_i)$.
3. Isi kolom kedua: $Q_{2i+1,1} = f'(x_i)$ untuk simpul kembar, dan $Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$ untuk $i \geq 1$ (pasangan simpul berbeda).
4. Untuk kolom $j = 2, \ldots, 2n+1$ hitung $Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$.
5. Keluarkan koefisien diagonal $Q_{k,k}$ dan susun $H_{2n+1}(x) = Q_{0,0} + \sum_{k=1}^{2n+1} Q_{k,k} \prod_{i=0}^{k-1}(x - z_i)$.

Contoh 1: Hermite kubik untuk $\ln x$

Bentuk polinom Hermite kubik untuk $f(x) = \ln x$ pada $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ memakai f dan $f'(x) = \frac{1}{x}$ di kedua simpul, lalu taksir $\ln 1{,}5$.

Penyelesaian.

Simpul ganda: $z_0 = z_1 = 1$, $z_2 = z_3 = 2$. Nilai: $f[z_0] = f[z_1] = 0$, $f[z_2] = f[z_3] = 0{,}693147$.

Beda terbagi pertama: $f[z_0, z_1] = f'(1) = 1$, $f[z_1, z_2] = \frac{0{,}693147 - 0}{2 - 1} = 0{,}693147$, $f[z_2, z_3] = f'(2) = 0{,}5$.

Beda terbagi kedua: $f[z_0, z_1, z_2] = \frac{0{,}693147 - 1}{2 - 1} = -0{,}306853$, $f[z_1, z_2, z_3] = \frac{0{,}5 - 0{,}693147}{2 - 1} = -0{,}193147$.

Beda terbagi ketiga: $f[z_0, \ldots, z_3] = \frac{-0{,}193147 - (-0{,}306853)}{2 - 1} = 0{,}113706$.

$$H_3(x) = 1 \cdot (x - 1) - 0{,}306853(x - 1)^2 + 0{,}113706(x - 1)^2(x - 2)$$

Karena $f[z_0] = 0$, suku konstan hilang. Pada $x = 1{,}5$: $H_3(1{,}5) = 0{,}409074$, sedangkan $\ln 1{,}5 = 0{,}405465$, galat $0{,}003608$. Batas teoretis (dengan $\max|f^{(4)}| = 6$ pada $[1, 2]$): $\frac{6}{24}(1{,}5 - 1)^2(1{,}5 - 2)^2 = \frac{6}{24} \cdot 0{,}0625 = 0{,}015625$, dan galat sebenarnya di bawahnya.

Contoh 2: Hermite derajat lima untuk $\sin x$

Bentuk H_5 untuk $f(x) = \sin x$ pada simpul $0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5$ (dengan $f' = \cos x$), lalu hitung $H_5(1{,}2)$ dan bandingkan dengan batas galat.

Penyelesaian.

Barisan z: $0{,}5; 0{,}5; 1; 1; 1{,}5; 1{,}5$. Koefisien Newton (diagonal tabel): $c_0 = 0{,}479426$, $c_1 = 0{,}877583$, $c_2 = -0{,}306983$, $c_3 = -0{,}121188$, $c_4 = 0{,}032256$, $c_5 = 0{,}004449$.

Hasil evaluasi: $H_5(1{,}2) = 0{,}93204117$, sedangkan $\sin 1{,}2 = 0{,}93203909$. Galat sebenarnya $0{,}00000208$.

Batas teoretis: $|f^{(6)}| \le 1$ dan $\prod (1{,}2 - x_i)^2 = (0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3)^2 = 0{,}001764$, sehingga galat $\le \frac{1}{720} \cdot 0{,}001764 = 0{,}00000245$. Galat sebenarnya memenuhi batas itu.

Contoh 3: Posisi dan kecepatan kereta

Seorang pengamat mencatat posisi (meter) dan kecepatan (m/detik) sebuah kereta: pada $t = 0$ detik posisi 0, kecepatan 10; pada $t = 2$ posisi 30, kecepatan 18; pada $t = 5$ posisi 110, kecepatan 26. Taksir posisi dan kecepatan pada $t = 4$ dengan interpolasi Hermite.

Penyelesaian.

Gunakan $z = 0, 0, 2, 2, 5, 5$. Koefisien Newton: $c_0 = 0{,}000000$, $c_1 = 10{,}000000$, $c_2 = 2{,}500000$, $c_3 = -0{,}500000$, $c_4 = 0{,}155556$, $c_5 = -0{,}083704$.

Setelah diekspansi: $H_5(t) = 10{,}0000t + 5{,}7963t^2 - 3{,}1311t^3 + 0{,}9089t^4 - 0{,}0837t^5$.

Posisi taksiran $H_5(4) = 79{,}3126$ meter dan kecepatan taksiran $H_5'(4) = 31{,}6119$ m/detik. Pemeriksaan: $H_5(2) = 30{,}0000$, $H_5'(2) = 18{,}0000$, $H_5(5) = 110{,}0000$, $H_5'(5) = 26{,}0000$, sesuai data.

Kesalahan umum

• Membagi nol saat menghitung $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$. Pada simpul kembar jangan dibagi $z_{2i+1} - z_{2i} = 0$; isi langsung dengan $f'(x_i)$.

• Menganggap derajatnya n seperti Lagrange. Dengan $n+1$ simpul beserta turunan, derajatnya hingga $2n+1$.

• Mengisi kolom kedua tabel dengan urutan yang salah: baris simpul kembar diisi turunan, baris yang menghubungkan dua simpul berbeda diisi selisih terbagi biasa.

• Mengira interpolasi Hermite selalu lebih baik daripada Lagrange. Turunan yang tidak akurat (misalnya dari pengukuran bising) justru merusak hasilnya, dan derajat tinggi dapat berosilasi.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa polinom Hermite pada $n+1$ simpul tunggal pada derajat $\le 2n+1$? Jelaskan dengan menghitung akar selisih dua kandidat.
2. Bagaimana kuadrat $L_{n,j}$ pada basis Hermite menjamin nilai dan turunan nol di simpul lain?
3. Mengapa simpul ganda pada tabel beda terbagi masuk akal sebagai limit $x_{i+1} \to x_i$ dari $f[x_i, x_{i+1}]$?
4. Bandingkan Hermite kubik per selang dengan spline kubik: apa syarat tambahan yang dipakai spline sebagai pengganti turunan yang diketahui?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan polinom Hermite kubik dengan $H(0)=1,\ H'(0)=0,\ H(1)=2,\ H'(1)=3$.

Kunci: Koefisien Newton dengan $z = 0, 0, 1, 1$: 1, 0, 1, 1.
$H(x) = 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + 1\cdot x^2(x-1) = x^3 + 1$. Cek: $H(1)=2,\ H'(1)=3$.

2. Beri batas galat interpolasi Hermite kubik untuk $f(x) = e^x$ pada simpul 0 dan 1 di seluruh $[0,1]$.

Kunci: Galat $= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^2(x-1)^2 \le \frac{e}{24}\cdot\frac{1}{16} = \frac{e}{384} \approx 0{,}00708$, karena $\max_{[0,1]} x^2(x-1)^2 = \frac{1}{16}$ di $x = \frac{1}{2}$.

3. Berapa derajat maksimum polinom Hermite untuk 4 simpul beserta turunannya? Berapa turunan fungsi yang dibutuhkan agar rumus galat berlaku?

Kunci: $n+1 = 4$ maka $n = 3$ dan derajat maksimum $2n+1 = 7$. Galat memakai $f^{(8)}$, jadi $f \in C^8$ pada selang yang memuat simpul.

Steven Paulus Siahaan

3.5 Cubic Spline Interpolation

Rujukan buku: halaman 144

Interpolasi polinom tunggal melalui banyak titik memakai derajat tinggi, dan polinom derajat tinggi cenderung berosilasi liar di antara simpul. Interpolasi potongan-potongan (piecewise) menghindarinya: selang dipecah menjadi subselang kecil, dan tiap subselang diberi polinom berderajat rendah. Potongan linear menghasilkan kurva bersiku di simpul; potongan Hermite kubik mulus tetapi perlu turunan di simpul. Spline kubik menjawab keduanya: kurva mulus tanpa meminta turunan data.

Definisi. Diberi f pada $[a, b]$ dan simpul $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Spline kubik interpolan S adalah fungsi yang pada tiap $[x_j, x_{j+1}]$ berupa polinom kubik $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ dan memenuhi: (i) $S(x_j) = f(x_j)$; (ii) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, kontinuitas; (iii) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$; (iv) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ untuk simpul dalam; dan (v) satu dari dua syarat batas: natural (bebas) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, atau terjepit (clamped) $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$.

Hitung syaratnya. Ada n potongan dengan 4 koefisien tiap potongan, jadi $4n$ bilangan tak diketahui. Syarat interpolasi memberi $2n$ persamaan (tiap potongan melalui kedua ujungnya), kontinuitas S' dan S'' di $n - 1$ simpul dalam memberi $2(n - 1)$ persamaan lagi. Totalnya $4n - 2$, sehingga dua syarat batas diperlukan. Dengan salah satu pasangan syarat batas itu, spline kubik interpolan ada dan tunggal.

Penurunan. Misalkan $h_j = x_{j+1} - x_j$. Dari interpolasi, $a_j = f(x_j)$. Kontinuitas S dan S' dan S'' dapat direduksi hingga semuanya dinyatakan dalam c_j: $d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$ dan $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$. Substitusi menghasilkan sistem untuk $j = 1, \ldots, n - 1$,

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \tfrac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \tfrac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}).$$

Untuk spline natural, $c_0 = c_n = 0$, sehingga sistem berukuran $(n - 1) \times (n - 1)$. Untuk spline terjepit, tambah dua persamaan: $2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$ dan $h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$, sehingga ukuran $(n + 1) \times (n + 1)$. Matriks sistemnya tridiagonal dan dominan secara diagonal, jadi tidak singular, dapat diselesaikan stabil tanpa pivot dalam $O(n)$ operasi. Itu keunggulan komputasional besar dibanding polinom derajat tinggi.

Galat. Bila $f \in C^4[a, b]$ dengan $\max|f^{(4)}(x)| \le M$ dan $h = \max_j (x_{j+1} - x_j)$, spline terjepit interpolan memenuhi $|f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384}h^4$ untuk semua $x \in [a, b]$. Galatnya berorde h^4: mengecilkan jarak simpul menjadi setengahnya mengurangi galat sekitar enam belas kali. Spline natural tidak punya orde setinggi ini dekat ujung, karena memaksa $S'' = 0$ yang umumnya tidak sesuai dengan f.

Sifat lain: dari semua fungsi yang meminimalkan energi lentur $\int (g'')^2$ di antara interpolan mulus, spline natural adalah minimumnya; itu asal-usul nama (mistar fleksibel, spline, di antara paku-paku). Pilih spline terjepit bila turunan di ujung diketahui; bila tidak, spline natural adalah pilihan standar, atau syarat not-a-knot yang sering dipakai perangkat lunak. Spline kubik juga berhubungan dengan kurva parametrik pada Seksi 3.6.

Konsep kunci

Interpolasi potongan-potongan — Selang dibagi menjadi subselang dan tiap subselang diberi polinom derajat rendah, menghindari osilasi polinom derajat tinggi.

Spline kubik — Fungsi yang berupa kubik di tiap subselang dan kontinu bersama turunan pertama dan keduanya di simpul dalam.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Penghitungan syarat — Ada $4n$ koefisien dan $4n-2$ syarat dari interpolasi dan kontinuitas; dua syarat batas diperlukan agar solusinya tunggal.

Spline natural — Syarat batas $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$. Tidak memerlukan turunan data, tetapi kurang teliti di dekat ujung.

Spline terjepit (clamped) — Syarat batas $S'(x_0) = f'(x_0)$ dan $S'(x_n) = f'(x_n)$. Lebih teliti, dan galatnya berorde h^4 bila $f \in C^4$.

Sistem tridiagonal — Persamaan untuk c_j membentuk matriks tridiagonal dominan diagonal sehingga selalu dapat diselesaikan dalam $O(n)$ operasi.

Batas galat — $|f - S| \le \frac{5M}{384} h^4$ dengan $M = \max|f^{(4)}|$ untuk spline terjepit.

Potongan kubik

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

Koefisien dari c_j

$$a_j = f(x_j), \quad b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \quad d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$$

Sistem tridiagonal untuk c_j

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

Syarat batas spline terjepit

$$2h_0 c_0 + h_0 c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

Batas galat spline terjepit

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{5M}{384} h^4, \quad M = \max|f^{(4)}|, \ h = \max_j h_j$$

Algoritma: Spline kubik natural (sistem tridiagonal)

1. Masukkan $x_0 < \cdots < x_n$ dan $a_j = f(x_j)$. Hitung $h_j = x_{j+1} - x_j$ untuk $j = 0, \ldots, n-1$.
2. Untuk $j = 1, \ldots, n-1$ hitung ruas kanan $\alpha_j = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$.
3. Selesaikan sistem tridiagonal dengan $c_0 = c_n = 0$: $l_1 = 2(h_0 + h_1)$, $\mu_1 = \frac{h_1}{l_1}$, $z_1 = \frac{\alpha_1}{l_1}$; untuk $j = 2, \ldots, n-1$: $l_j = 2(x_{j+1} - x_{j-1}) - h_{j-1}\mu_{j-1}$, $\mu_j = \frac{h_j}{l_j}$, $z_j = \frac{\alpha_j - h_{j-1}z_{j-1}}{l_j}$.
4. Substitusi mundur: $c_n = 0$, dan untuk $j = n-1, \ldots, 0$ hitung $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ (dengan $z_0 = \mu_0 = 0$).
5. Hitung $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j(2c_j + c_{j+1})}{3}$ dan $d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$ untuk $j = 0, \ldots, n-1$; keluarkan a_j, b_j, c_j, d_j.
6. Untuk spline terjepit, pakai dua persamaan batas di atas pada baris pertama dan terakhir, sehingga c_0 dan c_n juga menjadi bilangan tak diketahui.

Contoh 1: Spline natural untuk $\ln(1+x)$

Bentuk spline kubik natural untuk $f(x) = \ln(1+x)$ pada simpul $x = 0, 1, 2, 3$ dan taksir $f(1{,}5)$.

Penyelesaian.

Nilai $a_j = f(x_j)$: $a_0 = 0{,}00000$, $a_1 = 0{,}69315$, $a_2 = 1{,}09861$, $a_3 = 1{,}38629$. Semua $h_j = 1$. Syarat natural: $c_0 = c_3 = 0$. Dua persamaan sisanya:

$$4c_1 + c_2 = 3(a_2 - a_1) - 3(a_1 - a_0) = -0{,}86305$$

$$c_1 + 4c_2 = 3(a_3 - a_2) - 3(a_2 - a_1) = -0{,}35335$$

Penyelesaiannya: $c_1 = -0{,}20659$ dan $c_2 = -0{,}03669$. Dari $b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$ dan $d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$ diperoleh

S_0: $a_0 = 0{,}00000,\ b_0 = 0{,}76201,\ c_0 = 0{,}00000,\ d_0 = -0{,}06886$.

S_1: $a_1 = 0{,}69315,\ b_1 = 0{,}55542,\ c_1 = -0{,}20659,\ d_1 = 0{,}05663$.

S_2: $a_2 = 1{,}09861,\ b_2 = 0{,}31214,\ c_2 = -0{,}03669,\ d_2 = 0{,}01223$.

Karena $1{,}5 \in [1, 2]$, pakai S_1: $S(1{,}5) = a_1 + b_1(0{,}5) + c_1(0{,}5)^2 + d_1(0{,}5)^3 = 0{,}926290$, sedangkan $\ln 2{,}5 = 0{,}916291$ (galat $0{,}009999$).

Contoh 2: Spline terjepit untuk data yang sama

Untuk data yang sama pada Contoh 1, bentuk spline kubik terjepit (clamped) memakai $f'(0) = 1$ dan $f'(3) = \frac{1}{4}$, lalu taksir $f(1{,}5)$ dan bandingkan.

Penyelesaian.

Sekarang ada dua persamaan tambahan di ujung: $2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0)$ dan $h_2c_2 + 2h_2c_3 = 3f'(x_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2)$, ditambah dua persamaan tengah yang sama seperti sebelumnya (memakai $c_0, \ldots, c_3$ sebagai empat bilangan tak diketahui). Hasil penyelesaian: $c_0 = -0{,}41082$, $c_1 = -0{,}09892$, $c_2 = -0{,}05654$, $c_3 = -0{,}02825$.

S_0: $a_0 = 0{,}00000,\ b_0 = 1{,}00000,\ c_0 = -0{,}41082,\ d_0 = 0{,}10397$.

S_1: $a_1 = 0{,}69315,\ b_1 = 0{,}49026,\ c_1 = -0{,}09892,\ d_1 = 0{,}01413$.

S_2: $a_2 = 1{,}09861,\ b_2 = 0{,}33480,\ c_2 = -0{,}05654,\ d_2 = 0{,}00943$.

$S(1{,}5) = 0{,}915313$ dengan galat $0{,}000978$, dibanding galat spline natural $0{,}009999$. Spline terjepit lebih teliti karena syarat ujungnya memakai kemiringan sebenarnya, sedangkan spline natural memaksa $S'' = 0$ padahal $f''(0) = -1$ dan $f''(3) = -\frac{1}{16}$ tidak nol.

Contoh 3: Data tak seragam dan pemeriksaan kontinuitas

Bentuk spline natural untuk data $(0, 2),\ (1, 1),\ (3, 4),\ (4, 3)$ (jarak simpul tidak seragam), periksa kontinuitas S' dan S'' di simpul dalam, dan hitung $S(2)$.

Penyelesaian.

Jarak: $h_0 = 1,\ h_1 = 2,\ h_2 = 1$. Dengan $c_0 = c_3 = 0$, persamaan simpul dalam:

$$2(h_0+h_1)c_1 + h_1 c_2 = \tfrac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \tfrac{3}{h_0}(a_1-a_0)$$

$$h_1 c_1 + 2(h_1+h_2)c_2 = \tfrac{3}{h_2}(a_3-a_2) - \tfrac{3}{h_1}(a_2-a_1)$$

yaitu $6c_1 + 2c_2 = 7{,}5000$ dan $2c_1 + 6c_2 = -7{,}5000$. Solusi: $c_1 = 1{,}87500$, $c_2 = -1{,}87500$.

S_0: $a_0 = 2{,}00000,\ b_0 = -1{,}62500,\ c_0 = 0{,}00000,\ d_0 = 0{,}62500$.

S_1: $a_1 = 1{,}00000,\ b_1 = 0{,}25000,\ c_1 = 1{,}87500,\ d_1 = -0{,}62500$.

S_2: $a_2 = 4{,}00000,\ b_2 = 0{,}25000,\ c_2 = -1{,}87500,\ d_2 = 0{,}62500$.

Pemeriksaan di $x_1 = 1$: $S_0'(1) = 0{,}25000$, $S_1'(1) = 0{,}25000$; $S_0''(1) = 3{,}75000$, $S_1''(1) = 3{,}75000$. Di $x_2 = 3$: $S_1'(3) = 0{,}25000$, $S_2'(3) = 0{,}25000$; $S_1''(3) = -3{,}75000$, $S_2''(3) = -3{,}75000$. Semuanya cocok.

$x = 2$ berada di $[1, 3]$, jadi $S(2) = S_1(2) = 2{,}50000$.

Kesalahan umum

• Mengira spline kubik adalah polinom kubik tunggal. Ia kubik di tiap subselang dengan koefisien berbeda; hanya S, S', S'' yang kontinu, sedangkan S''' umumnya melompat di simpul.

• Lupa bahwa $4n$ koefisien membutuhkan dua syarat batas. Tanpa syarat batas sistemnya kekurangan dua persamaan.

• Memakai batas galat $\frac{5M}{384}h^4$ untuk spline natural. Batas itu dibuktikan untuk spline terjepit; spline natural tidak menjamin orde h^4 dekat ujung bila f'' di ujung tidak nol.

• Salah memakai bentuk lokal $S_j(x)$: variabelnya adalah $(x - x_j)$, bukan x, dan potongan yang dipakai adalah yang selangnya memuat x.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa interpolasi spline kubik lebih disukai daripada polinom tunggal berderajat n ketika simpulnya banyak dan seragam?
2. Mengapa syarat batas natural dan terjepit sama-sama menghasilkan sistem tridiagonal tetapi dengan akurasi berbeda?
3. Mengapa dominansi diagonal matriks sistem menjamin keberadaan dan ketunggalan solusi?
4. Apa arti fisis spline sebagai mistar lentur, dan bagaimana ini berkaitan dengan syarat $S'' = 0$ di ujung?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan spline kubik natural untuk data $(0,0),\ (1,1),\ (2,0)$.

Kunci: $c_0 = c_2 = 0$; $4c_1 = 3(0-1) - 3(1-0) = -6$ sehingga $c_1 = -1{,}50$. Potongan 0: $b_0 = 1{,}50$, $d_0 = -0{,}50$, jadi $S_0 = 1{,}5x - 0{,}5x^3$. Potongan 1 (dalam $t = x - 1$): $b_1 = 0{,}00$, $c_1 = -1{,}50$, $d_1 = 0{,}50$, jadi $S_1 = 1 - 1{,}5t^2 + 0{,}5t^3$.

2. Berapa banyak koefisien dan syarat pada spline kubik dengan 6 simpul ($n = 5$)? Sebut syarat yang ada.

Kunci: Koefisien $4n = 20$. Syarat: interpolasi $2n = 10$; kontinuitas S' di 4 simpul dalam: 4; kontinuitas S'': 4; total 18. Dua syarat batas melengkapi menjadi 20.

3. Beri batas galat spline terjepit untuk $f(x) = \sin x$ pada $[0, 2]$ dengan simpul berjarak $h = 0{,}5$.

Kunci: $M = \max|\sin x| \le 1$. Batas $\le \frac{5 \cdot 1}{384}(0{,}5)^4 = 0{,}000814$. Jika h dikecilkan menjadi $0{,}25$, batas menjadi seperenam belasnya, $0{,}0000509$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

3.6 Parametric Curves

Rujukan buku: halaman 164

Semua teknik interpolasi sebelumnya menyatakan y sebagai fungsi x. Banyak kurva tidak dapat dinyatakan begitu: lingkaran, huruf, atau lintasan yang berputar balik memiliki dua nilai y untuk satu x atau garis singgung vertikal. Solusinya adalah representasi parametrik: koordinat x dan y masing-masing dinyatakan sebagai fungsi satu parameter t, sehingga kurva adalah jejak titik $(x(t), y(t))$ saat t berjalan pada suatu selang.

Pendekatan paling lugas: diberikan titik-titik (x_i, y_i) berurutan, pilih parameter $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ lalu interpolasi $x_i = x(t_i)$ dan $y_i = y(t_i)$ secara terpisah, dengan polinom Lagrange atau spline. Pilihan t_i bebas, dan memengaruhi bentuk kurva. Pilihan sederhana adalah jarak sama, sedangkan memakai panjang busur atau jarak antartitik biasanya memberi bentuk yang lebih wajar bila titik-titik berjarak tidak sama. Kelemahan metode ini muncul pada grafika komputer: polinom interpolasi derajat tinggi atau spline global berubah di seluruh kurva bila satu titik digeser, dan biayanya besar.

Untuk desain interaktif, orang memakai kurva kubik potongan-potongan yang tiap potongannya bergantung hanya pada data lokal. Tiap potongan adalah pasangan kubik Hermite $x(t), y(t)$ pada $t \in [0, 1]$ yang ditentukan oleh titik ujung dan turunan di ujung. Karena menentukan turunan secara langsung sulit bagi pengguna, turunan diberikan lewat guidepoint: titik di garis singgung yang diinginkan. Dengan titik ujung (x_0, y_0), (x_1, y_1) dan guidepoint $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ serta $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$, syaratnya $x'(0) = \alpha_0$, $x'(1) = \alpha_1$ dan $y'(0) = \beta_0$, $y'(1) = \beta_1$. Polinom kubik tunggal yang memenuhinya adalah

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - (\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + \alpha_0 t + x_0,$$

dan $y(t)$ dengan β dan y menggantikan α dan x. Hanya kemiringan $\frac{\beta}{\alpha}$ yang menentukan arah garis singgung; panjang vektor (α, β) mengatur seberapa kuat kurva menempel pada garis singgung di dekat ujung (makin panjang, makin lurus di sekitarnya). Enam syarat (dua titik ujung, dua kemiringan) tidak mengikat delapan koefisien, jadi ada kebebasan memilih panjang vektor.

Kurva Bézier adalah versi standar dari ide ini. Turunan di ujung dikalikan 3: $x'(0) = 3\alpha_0$, $x'(1) = 3\alpha_1$. Dengan titik kendali $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + (\alpha_0, \beta_0)$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 - (\alpha_1, \beta_1)$, $\mathbf{P}_3 = (x_1, y_1)$, kurvanya berbentuk Bernstein:
$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$. Bobot Bernstein bernilai tak negatif dan berjumlah 1, sehingga kurva selalu berada di dalam cangkang cembung titik kendalinya, dimulai di $\mathbf{P}_0$ dan berakhir di $\mathbf{P}_3$, bersinggungan dengan segmen $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ dan $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ di kedua ujung. Titik pada kurva dapat dihitung stabil dengan algoritma de Casteljau, yaitu interpolasi linear berulang antara titik-titik kendali.

Menyambung beberapa potongan: titik akhir potongan ke-i adalah titik awal potongan berikutnya, dan agar kurva mulus, turunannya harus cocok. Kontinuitas C^1 pada parameter yang sama memerlukan $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0$; bila hanya arah singgung yang perlu sama (kontinu geometris), tiga titik $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$ cukup segaris. Menggeser satu titik kendali hanya mengubah potongan yang memuatnya dan paling banyak tetangganya, inilah alasan Bézier mendominasi desain grafis. Dalam sistem nyata, keluarga yang lebih umum, seperti B-spline, memberi kontinuitas lebih tinggi sambil tetap lokal; ide dasarnya tetap sama dengan yang dibahas di sini.

Konsep kunci

Kurva parametrik — Kurva yang koordinat x dan y-nya masing-masing adalah fungsi parameter t. Mampu menyatakan kurva yang bukan grafik fungsi.

Pemilihan parameter — Nilai t_i bebas dipilih, dan memengaruhi bentuk kurva interpolasi. Jarak sama sederhana; jarak antartitik atau panjang busur sering lebih wajar.

Hermite kubik parametrik — Pasangan kubik $x(t), y(t)$ pada $[0,1]$ yang ditentukan oleh titik ujung dan vektor turunan di ujung. Mudah dihitung dan bersifat lokal.

Guidepoint — Titik pada garis singgung yang diinginkan di suatu titik ujung. Jaraknya dari titik ujung mengatur seberapa kuat kurva menempel pada garis singgung.

Kurva Bézier kubik — Hermite kubik dengan turunan ujung dikalikan 3, dinyatakan lewat empat titik kendali dan basis Bernstein. Terletak dalam cangkang cembung titik kendali.

Algoritma de Casteljau — Menghitung titik Bézier dengan interpolasi linear berulang pada titik kendali, sederhana dan stabil secara numerik.

Kontinuitas sambungan — Dua potongan bersambung mulus bila titik ujungnya sama dan vektor turunannya sama (C^1) atau segaris dan searah (kontinu geometris).

Interpolasi parametrik

$$x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i), \qquad t_0 < t_1 < \cdots < t_n$$

Hermite kubik untuk $x(t)$

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - (\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + \alpha_0 t + x_0$$

Versi Bézier (turunan dikali 3)

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$$

Titik kendali dari guidepoint

$$\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0),\ \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + (\alpha_0, \beta_0),\ \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 - (\alpha_1, \beta_1),\ \mathbf{P}_3 = (x_1, y_1)$$

Bentuk Bernstein kubik

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad 0 \le t \le 1$$

Turunan di ujung

$$\mathbf{B}'(0) = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{B}'(1) = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$$

Algoritma: Kurva Bézier kubik per potongan

1. Untuk tiap potongan $i = 0, \ldots, n-1$ masukkan titik ujung (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) dan guidepoint $(x_i + \alpha_i, y_i + \beta_i)$, $(x_{i+1} - \alpha_i', y_{i+1} - \beta_i')$.
2. Bentuk titik kendali $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ dari titik ujung dan guidepoint tersebut.
3. Hitung koefisien polinom: $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ dengan $a_0 = x_0$, $a_1 = 3\alpha_0$, $a_2 = 3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)$, $a_3 = 2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)$, dan serupa untuk $y(t)$ dengan β.
4. Evaluasi $(x(t), y(t))$ pada banyak nilai $t \in [0,1]$ (misalnya langkah $0{,}01$) dengan skema Horner atau de Casteljau, lalu gambar ruas garis antar titik.

5. Untuk sambungan mulus, pastikan titik kendali terakhir potongan i, titik sambung, dan titik kendali pertama potongan $i+1$ segaris (dan berjarak sama untuk kontinu C^1).

Contoh 1: Interpolasi Lagrange parametrik

Buat kurva parametrik dari interpolasi Lagrange untuk titik-titik $(0,0),\ (1,2),\ (3,3),\ (4,0)$ berurutan dengan parameter $t_i = \frac{i}{3}$, $i = 0, \ldots, 3$. Hitung titik pada $t = \frac{1}{2}$.

Penyelesaian.

Data: $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$; $x = 0, 1, 3, 4$; $y = 0, 2, 3, 0$. Interpolasi terpisah untuk $x(t)$ dan $y(t)$ memberi

$$x(t) = -9t^3 + 13{,}5t^2 - 0{,}5t$$

$$y(t) = -13{,}5t^3 + 9t^2 + 4{,}5t$$

Pemeriksaan: $x(\frac{1}{3}) = 1{,}0000$, $y(\frac{2}{3}) = 3{,}0000$. Pada $t = \frac{1}{2}$: $x = 2{,}0000$ dan $y = 2{,}8125$, jadi titiknya $(2{,}0000,\ 2{,}8125)$. Kurva melalui keempat titik sesuai urutan, tetapi koefisiennya bergantung pada semua data sekaligus.

Contoh 2: Hermite kubik versus Bézier dari guidepoint

Titik ujung $(x_0, y_0) = (0, 0)$ dan $(x_1, y_1) = (2, 0)$, dengan guidepoint $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0) = (1, 2)$ dan $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1) = (1, 2)$. Tentukan kurva Hermite kubik parametrik, dan bandingkan dengan versi Bézier yang turunan ujungnya dikalikan 3.

Penyelesaian.

Dari guidepoint: $\alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 2$; $\alpha_1 = x_1 - 1 = 1,\ \beta_1 = y_1 - 2 = -2$.

Rumus Hermite: $x(t) = [2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - (\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + \alpha_0 t + x_0$, dan serupa untuk y. Hasil:

$$x(t) = -2t^3 + 3t^2 + t$$

$$y(t) = -2t^2 + 2t$$

Pada $t = \frac{1}{2}$: $(1{,}0000,\ 0{,}5000)$. Kemiringan di ujung: $\frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{2}{1} = 2$ dan $\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{-2}{1} = -2$.

Versi Bézier (faktor 3 pada turunan): $x(t) = [2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$:

$$x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 3t$$

$$y(t) = -6t^2 + 6t$$

Pada $t = \frac{1}{2}$: $(1{,}0000,\ 1{,}5000)$. Arah garis singgung di ujung sama (kemiringan 2 dan -2), tetapi kurva Bézier lebih mendekati garis singgung di dekat ujung, sehingga $y(\frac{1}{2})$ lebih besar (1{,}5000 dibanding 0{,}5000).

Contoh 3: Titik Bézier dengan Bernstein dan de Casteljau

Titik kendali Bézier kubik adalah $\mathbf{P}_0 = (0,0),\ \mathbf{P}_1 = (1,2),\ \mathbf{P}_2 = (3,3),\ \mathbf{P}_3 = (4,0)$. Hitung titik pada $t = \frac{1}{4}$ dengan rumus Bernstein dan dengan algoritma de Casteljau, lalu tentukan syarat agar segmen berikutnya yang dimulai di $\mathbf{P}_3$ tersambung dengan turunan pertama kontinu.

Penyelesaian.

Bobot Bernstein pada $t = \frac{1}{4}$: $(1-t)^3 = 0{,}421875$, $3t(1-t)^2 = 0{,}421875$, $3t^2(1-t) = 0{,}140625$, $t^3 = 0{,}015625$ (jumlah 1).

Rumus Bernstein: $x = 0{,}906250$, $y = 1{,}265625$.

De Casteljau: tingkat 1: $(0{,}2500, 0{,}5000)$, $(1{,}5000, 2{,}2500)$, $(3{,}2500, 2{,}2500)$; tingkat 2: $(0{,}56250, 0{,}93750)$, $(1{,}93750, 2{,}25000)$; tingkat 3: $(0{,}906250, 1{,}265625)$. Hasilnya sama.

Turunan di ujung: $\mathbf{B}'(0) = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (3, 6)$ dan $\mathbf{B}'(1) = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) = (3, -9)$.

Segmen kedua dengan titik kendali $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_3,\ \mathbf{Q}_1, \ldots$ memenuhi $\mathbf{B}_2'(0) = 3(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$. Agar $\mathbf{B}_2'(0) = \mathbf{B}'(1)$ (kontinu C^1 pada parameter yang sama), perlu $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = (1, -3)$, jadi $\mathbf{Q}_1 = (5, -3)$. Bila hanya diminta garis singgung yang searah (kontinu geometris), cukup $\mathbf{Q}_1$ berada pada garis melalui $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ di sisi seberang $\mathbf{P}_2$.

Kesalahan umum

• Mengira kurva parametrik untuk (x_i, y_i) unik. Hasilnya bergantung pada pilihan parameter t_i; titik-titik data sama bisa menghasilkan kurva berbeda.

• Mencampur versi Hermite dan Bézier: bila guidepoint dipakai sebagai titik kendali Bézier, turunan ujungnya adalah $3\times$ selisih titik, bukan α langsung. Menyalin koefisien dari satu rumus ke rumus lainnya menghasilkan kurva yang salah.

• Mengira kurva Bézier melewati semua titik kendali. Hanya $\mathbf{P}_0$ dan $\mathbf{P}_3$ yang dilewati; $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ hanya mengarahkan.

• Menganggap kemiringan sama berarti kurva sama. Kemiringan $\frac{\beta}{\alpha}$ hanya menentukan arah; panjang vektor (α, β) mengubah bentuk kurva.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa grafik $y = f(x)$ tidak bisa menyatakan lingkaran penuh, dan bagaimana representasi parametrik mengatasinya?
2. Mengapa grafika komputer memilih kubik Hermite/Bézier per potongan, bukan spline global atau polinom interpolasi berderajat tinggi?
3. Apa pengaruh memperpanjang atau memendekkan vektor guidepoint tanpa mengubah arahnya?
4. Apa beda kontinuitas C^1 dan kontinuitas geometris pada sambungan dua kurva Bézier, dan kapan perbedaan itu penting?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Titik kendali Bézier $(0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,0)$. Hitung titik pada $t=\frac{1}{2}$.

Kunci: $\mathbf{B}(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}\mathbf{P}_0+\frac{3}{8}\mathbf{P}_1+\frac{3}{8}\mathbf{P}_2+\frac{1}{8}\mathbf{P}_3=(0{,}5000,\ 0{,}7500)$.

2. Ujung $(1,1)$ dan $(5,1)$, guidepoint $(2,3)$ dan $(4,4)$. Tentukan titik kendali Bézier dan vektor turunan $\mathbf{B}'(0)$ serta $\mathbf{B}'(1)$.

Kunci: $\mathbf{P}_0=(1,1)$, $\mathbf{P}_1=(2,3)$, $\mathbf{P}_2=(4,4)$, $\mathbf{P}_3=(5,1)$ (guidepoint kedua sudah berada pada posisi $\mathbf{P}_2$). $\mathbf{B}'(0)=3(1,2)=(3,6)$ dan $\mathbf{B}'(1)=3(1,-3)=(3,-9)$.

3. Tunjukkan dari bentuk Bernstein bahwa $\mathbf{B}'(0)=3(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)$.

Kunci: Turunan bobot di $t=0$: $\frac{d}{dt}(1-t)^3=-3$, $\frac{d}{dt}3t(1-t)^2=3$, dua bobot lain turunannya 0 di $t=0$. Maka $\mathbf{B}'(0)=-3\mathbf{P}_0+3\mathbf{P}_1=3(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)$.

Pesan Utama

Ingat

Lebih banyak titik tidak selalu lebih baik untuk satu polinom; potongan-potongan berderajat rendah (spline) biasanya lebih stabil.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan