MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 4

Diferensiasi dan Integrasi Numerik

Numerical Differentiation and Integration

Halaman buku 173 – 256 • 10 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Turunan dan integral numerik didasarkan pada polinom interpolasi: fungsi diganti polinom, lalu polinom itu dideferensialkan atau diintegralkan. Rumus beda hingga memiliki orde galat dalam h; ekstrapolasi Richardson menggabungkan hasil berlainan h untuk menaikkan orde.

Aturan trapesium dan Simpson dipakai secara komposit pada banyak subinterval. Romberg memakai ekstrapolasi pada trapesium komposit, kuadratur adaptif membagi interval hanya di tempat fungsi sulit, dan kuadratur Gauss memilih titik simpul optimal. Bab ditutup dengan integral ganda dan integral tak wajar.

Tujuan Pembelajaran

1. Menurunkan rumus beda hingga dan menentukan orde galatnya.
2. Menerapkan aturan trapesium, Simpson, dan versi kompositnya.
3. Menggunakan Romberg dan kuadratur adaptif untuk mencapai toleransi tertentu.
4. Menjelaskan derajat ketepatan kuadratur Gauss.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
4.1	Numerical Differentiation	174	3 contoh
4.2	Richardson's Extrapolation	185	2 contoh
4.3	Elements of Numerical Integration	193	Def. 4.1; Teo. 4.2; Teo. 4.3; 2 contoh
4.4	Composite Numerical Integration	203	Teo. 4.4; Teo. 4.5; Teo. 4.6; 2 contoh
4.5	Romberg Integration	213	2 contoh
4.6	Adaptive Quadrature Methods	220	1 contoh
4.7	Gaussian Quadrature	228	Teo. 4.7; 2 contoh
4.8	Multiple Integrals	235	2 contoh
4.9	Improper Integrals	250	3 contoh
4.10	Survey of Methods and Software	256	–

Rumus dan Metode Kunci

Beda tengah tiga titik

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

Aturan trapesium

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right], \quad h = b - a$$

Aturan Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Simpson komposit (n genap)

$$\frac{h}{3}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)]$$

Ekstrapolasi Romberg

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Kuadratur Gauss (n titik)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(r_i), \quad \text{tepat untuk derajat} \le 2n-1$$

4.1 Numerical Differentiation

Rujukan buku: halaman 174

Turunan numerik dibutuhkan ketika f hanya diketahui lewat tabel nilai, atau ketika rumus turunannya terlalu rumit. Ide dasarnya sama dengan seluruh Bab 3: ganti f dengan polinom interpolasi yang melalui beberapa titik, lalu turunkan polinom itu. Karena polinom mudah diturunkan, kita memperoleh rumus yang hanya berisi nilai f di titik-titik simpul. Bentuk umumnya, untuk simpul $x_0, \ldots, x_n$, adalah $f'(x_j) \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x_j)$ dengan L_k polinom koefisien Lagrange, ditambah suku galat yang memuat turunan tingkat $n+1$ dari f.

Kasus paling sederhana memakai dua titik x_0 dan $x_0 + h$. Dari polinom Lagrange derajat satu diperoleh rumus beda maju (untuk $h > 0$) atau beda mundur (untuk $h < 0$):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

Galatnya berorde $O(h)$. Dengan tiga titik yang berjarak sama, $x_0 - h,\ x_0,\ x_0 + h$, diperoleh rumus tiga titik titik-tengah (beda pusat) yang jauh lebih baik karena suku f'' saling meniadakan:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

Galatnya berorde $O(h^2)$. Rumus tiga titik lain berguna di ujung tabel, ketika hanya ada data ke satu arah: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$. Dengan h negatif, rumus yang sama dipakai di ujung kanan. Perhatikan bahwa rumus titik-tengah memiliki konstanta galat yang kira-kira setengah dari rumus ujung, dan memakai satu evaluasi fungsi lebih sedikit; jadi bila ada pilihan, pakailah rumus pusat.

Rumus lima titik titik-tengah memperbaiki lagi akurasi sampai $O(h^4)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h} + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)$$

Untuk turunan kedua, kombinasi tiga titik pusat menghasilkan $f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$. Semua pernyataan galat di atas mensyaratkan f cukup mulus (misalnya $f \in C^3$ untuk rumus tiga titik pertama) dan bahwa ξ terletak di dalam selang yang dicakup titik-titiknya.

Ada satu pelajaran penting yang membedakan turunan numerik dari interpolasi: mengecilkan h tidak selalu memperbaiki hasil. Galat pemotongan memang mengecil seiring $h \to 0$, tetapi pembilangnya adalah selisih dua bilangan yang hampir sama, sehingga galat pembulatan pada nilai f (sebut besarnya paling banyak ε) diperbesar dengan faktor $\frac{1}{h}$. Untuk rumus titik-tengah, galat total kira-kira $\frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M$ dengan M batas $|f'''|$. Fungsi ini minimum di sekitar $h^* = \left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/3}$, dan di bawah nilai itu hasil justru memburuk. Itulah sebabnya turunan numerik dikatakan tidak stabil secara bawaan (ill-conditioned): ia memperbesar derau data. Karena itu, bila data berderau, turunan numerik harus dipakai dengan hati-hati, atau dihaluskan lebih dulu.

Dalam praktik, rumus beda dipakai untuk menghampiri turunan dalam penyelesaian persamaan diferensial (Bab 5 dan seterusnya) dan untuk menaksir gradien dalam optimasi. Teknik Richardson pada seksi berikutnya (4.2) menunjukkan cara menaikkan orde rumus-rumus ini tanpa menurunkan rumus baru.

Konsep kunci

Turunan lewat polinom interpolasi — Fungsi dihampiri oleh polinom Lagrange pada beberapa simpul, lalu polinom itu diturunkan. Hasilnya berupa kombinasi linear nilai fungsi dengan koefisien $L_k'(x_j)$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Beda maju, mundur, dan pusat — Beda maju memakai titik x_0 dan $x_0 + h$, beda mundur memakai $x_0 - h$ dan x_0, sedangkan beda pusat memakai titik di kedua sisi x_0. Beda pusat lebih akurat untuk jumlah evaluasi yang sebanding.

Orde galat — Galat pemotongan beda maju adalah $O(h)$, beda pusat tiga titik $O(h^2)$, dan beda pusat lima titik $O(h^4)$. Orde menyatakan seberapa cepat galat mengecil ketika h diperkecil.

Galat pembulatan — Nilai fungsi yang dibulatkan dengan galat ε menghasilkan galat sekitar $\frac{\varepsilon}{h}$ pada turunan. Makin kecil h, makin besar pengaruhnya.

Langkah optimal — Jumlah galat pemotongan dan pembulatan minimum pada h^* tertentu. Untuk rumus titik-tengah $h^* = \left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/3}$, sehingga h yang terlalu kecil merugikan.

Rumus ujung — Pada tepi tabel, rumus pusat tidak bisa dipakai karena tidak ada titik di satu sisi. Rumus tiga titik satu arah, $\frac{1}{2h}[-3f_0 + 4f_1 - f_2]$, menjadi pengganti dengan galat $O(h^2)$.

Turunan kedua — Rumus $\frac{1}{h^2}[f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)]$ mempunyai galat $O(h^2)$ dengan koefisien $-\frac{1}{12}f^{(4)}(\xi)$. Pembulatan diperbesar dengan faktor $\frac{1}{h^2}$, jadi lebih peka lagi.

Beda maju/mundur dua titik

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi)$$

Beda pusat tiga titik

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

Rumus ujung tiga titik

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

Beda pusat lima titik

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

Turunan kedua pusat

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

Langkah optimal (titik-tengah)

$$h^* = \left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/3}, \quad M \geq |f'''|$$

Algoritma: Memilih rumus dan langkah h untuk turunan numerik

1. Tentukan apakah x_0 berada di dalam tabel (ada titik di kedua sisi) atau di ujung. Di dalam, pilih rumus pusat; di ujung, pilih rumus satu arah.
2. Pilih orde yang diinginkan: tiga titik untuk $O(h^2)$, lima titik untuk $O(h^4)$ bila f cukup mulus.

3. Taksir ε (galat nilai f) dan M (batas turunan yang muncul di suku galat), lalu hitung h^* dari keseimbangan $\frac{\varepsilon}{h} \approx$ galat pemotongan.
4. Hitung hampiran dengan h dan $h/2$. Selisih keduanya memberi taksiran galat dan dapat dipakai untuk ekstrapolasi (Seksi 4.2).
5. Bila hasil memburuk ketika h diperkecil, berhenti: galat pembulatan sudah mendominasi.

Contoh 1: Beda maju untuk $f(x) = \sqrt{x}$ di $x_0 = 4$

Hampiri $f'(4)$ dengan beda maju untuk $h = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ dan bandingkan galat sebenarnya dengan batas $\frac{h}{2}\max|f''|$. Nilai eksak $f'(4) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Penyelesaian.

Karena $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, nilai $|f''|$ di $[4, 4+h]$ paling besar di $x = 4$, yaitu $\frac{1}{32} = 0{,}03125$. Maka batas galat adalah $\frac{h}{2} \cdot \frac{1}{32}$.

$h = 0{,}1$: $\frac{\sqrt{4{,}1} - 2}{0{,}1} = 0{,}248457$, galat sebenarnya $0{,}001543$, batas $0{,}001563$.

$h = 0{,}01$: hampiran $0{,}249844$, galat $0{,}000156$, batas $0{,}000156$.

$h = 0{,}001$: hampiran $0{,}249984$, galat $0{,}000016$, batas $0{,}000016$.

Galat berkurang kira-kira sepuluh kali lipat tiap kali h dibagi sepuluh, sesuai orde $O(h)$, dan batasnya hanya sedikit lebih besar dari galat sebenarnya karena f'' hampir konstan pada selang sekecil itu.

Contoh 2: Beda maju, mundur, pusat, dan lima titik untuk $f(x) = \cos x$ di $x_0 = 1$

Dengan $h = 0{,}1$, hitung $f'(1)$ memakai beda maju, beda mundur, beda pusat tiga titik, dan beda pusat lima titik. Nilai eksak $-\sin 1 = -0{,}841471$.

Penyelesaian.

Beda maju: $\frac{\cos 1{,}1 - \cos 1}{0{,}1} = -0{,}867062$, galat $0{,}025591$.

Beda mundur: $\frac{\cos 1 - \cos 0{,}9}{0{,}1} = -0{,}813077$, galat $0{,}028394$.

Beda pusat: $\frac{\cos 1{,}1 - \cos 0{,}9}{0{,}2} = -0{,}840069$, galat $0{,}001402$. Batas teoretis $\frac{h^2}{6}\max|f'''| \le \frac{0{,}01}{6}\sin 1{,}1 = 0{,}001485$, dan galat sebenarnya memang berada di bawahnya.

Lima titik: $\frac{\cos 0{,}8 - 8\cos 0{,}9 + 8\cos 1{,}1 - \cos 1{,}2}{1{,}2} = -0{,}841468$, galat $0{,}0000028$.

Tampak bahwa beda maju dan mundur menyimpang ke arah yang berlawanan dari nilai eksak dengan besar yang mirip (rata-ratanya adalah beda pusat), dan menaikkan orde memperkecil galat secara dramatis.

Contoh 3: Pengaruh galat pembulatan pada beda pusat

Hitung $f'(1)$ untuk $f(x) = \cos x$ dengan beda pusat, tetapi setiap nilai $\cos$ dibulatkan lebih dulu ke lima desimal. Pakai $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ dan amati galatnya.

Penyelesaian.

Hasilnya (nilai eksak $-0{,}841471$):

$h = 0{,}1$: hampiran $-0{,}840050$, galat $0{,}001421$.

$h = 0{,}01$: hampiran $-0{,}841500$, galat $0{,}000029$.

$h = 0{,}001$: hampiran $-0{,}840000$, galat $0{,}001471$.

$h = 0{,}0001$: hampiran $-0{,}850000$, galat $0{,}008529$.

Galat pemotongan tiap h kira-kira $\frac{h^2}{6}\sin 1$, yakni $0{,}001402$; $0{,}000014$; $0{,}00000014$; $0{,}0000000014$. Pada $h = 0{,}1$ dan $h = 0{,}01$ galat sebenarnya mengikuti galat pemotongan. Pada h yang lebih kecil, galat pembulatan (hingga sekitar $\frac{\varepsilon}{h}$ dengan $\varepsilon = 0{,}5 \times 10^{-5}$) mengambil alih, sehingga galat tidak lagi mengecil dan bahkan membesar. Jadi h terbaik di sini sekitar 10^{-2}.

Kesalahan umum

• Mengira bahwa h yang lebih kecil selalu memberi hasil yang lebih baik. Pada aritmetika berhingga galat pembulatan yang tumbuh seperti $\frac{1}{h}$ akhirnya mengalahkan penurunan galat pemotongan.

• Memakai rumus beda maju padahal data tersedia di kedua sisi. Rumus pusat memberi orde lebih tinggi dengan jumlah evaluasi yang sama atau lebih sedikit.

• Salah memberi tanda atau penyebut pada rumus ujung tiga titik, misalnya lupa faktor $2h$ atau menukar koefisien $-3, 4, -1$. Uji rumus dengan $f(x) = x$ dan $f(x) = x^2$ yang harus memberi hasil eksak.

• Menerapkan rumus galat tanpa memeriksa syarat kemulusan. Bila f''' tidak ada atau tidak terbatas di dekat x_0, orde $O(h^2)$ tidak berlaku.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa suku $f''(\xi)$ lenyap pada rumus titik-tengah tetapi tidak pada beda maju? Hubungkan dengan ekspansi Taylor di sekitar x_0.
2. Turunan numerik disebut tidak stabil, sedangkan integrasi numerik umumnya stabil. Apa perbedaan mendasar kedua operasi itu terhadap galat kecil pada data?
3. Bagaimana Anda memilih h bila hanya mempunyai data hasil pengukuran dengan galat sekitar ε dan tidak tahu M?
4. Mengapa rumus lima titik tidak otomatis lebih baik daripada rumus tiga titik pada data yang berderau?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $f(x) = \frac{1}{x}$ dengan data $f(2), f(2{,}1), f(2{,}2)$, hampiri $f'(2)$ memakai rumus ujung tiga titik. Bandingkan dengan nilai eksak.

Kunci: $\frac{1}{0{,}2}[-3f(2) + 4f(2{,}1) - f(2{,}2)] = -0{,}248918$, sedangkan $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0{,}25$; galat $\approx 0{,}001082$.

2. Tunjukkan bahwa rumus beda pusat tiga titik memberi hasil eksak untuk setiap polinom derajat paling tinggi dua, tetapi tidak untuk $f(x) = x^3$.

Kunci: Untuk $f(x) = x^2$: $\frac{(x_0+h)^2 - (x_0-h)^2}{2h} = 2x_0$, eksak. Untuk $f(x) = x^3$: $\frac{(x_0+h)^3 - (x_0-h)^3}{2h} = 3x_0^2 + h^2$, selisihnya $h^2 = \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$ karena $f''' = 6$. Sesuai rumus galat.

3. Hitung $f'(0{,}8)$ untuk $f(x) = \sin x$ dengan rumus lima titik dan $h = 0{,}1$, lalu bandingkan dengan $\cos 0{,}8$.

Kunci: $\frac{\sin 0{,}6 - 8\sin 0{,}7 + 8\sin 0{,}9 - \sin 1{,}0}{1{,}2} = 0{,}6967044$ dan $\cos 0{,}8 = 0{,}6967067$; galat sekitar $2{,}3 \times 10^{-6}$, sesuai $\frac{h^4}{30}|f^{(5)}| \approx \frac{10^{-4}}{30}(0{,}70)$.

4. Nilai f dibulatkan ke enam desimal ($\varepsilon = 5 \times 10^{-7}$) dan $|f'''| \le 1$. Hitung langkah optimal h^* untuk beda pusat dan galat totalnya.

Kunci: $h^* = (3\varepsilon/M)^{1/3} = (1{,}5 \times 10^{-6})^{1/3} \approx 0{,}01145$; galat total $\approx \frac{\varepsilon}{h^*} + \frac{h^{*2}}{6} \approx 0{,}0000655$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

4.2 Richardson's Extrapolation

Rujukan buku: halaman 185

Banyak rumus hampiran mempunyai galat yang bentuknya dapat diramalkan: galat itu berupa deret pangkat dalam parameter h. Ekstrapolasi Richardson memanfaatkan keteraturan ini. Alih-alih menurunkan rumus baru yang lebih akurat dari awal, kita menghitung hampiran biasa dengan beberapa nilai h, lalu menggabungkannya sedemikian rupa sehingga suku galat terbesar saling meniadakan. Metode ini lebih tua daripada namanya; Richardson dan Gaunt menerapkannya secara sistematis pada tahun 1927, tetapi gagasannya sudah dikenal sejak lama.

Misalkan $N_1(h)$ adalah hampiran untuk besaran M yang tidak diketahui, dengan $M = N_1(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots$ untuk semua $h > 0$ dan konstanta K_i yang tidak kita ketahui nilainya. Karena persamaan berlaku untuk semua h, kita boleh menggantinya dengan $\frac{h}{2}$:

$$M = N_1\left(\tfrac{h}{2}\right) + K_1 \tfrac{h}{2} + K_2 \tfrac{h^2}{4} + K_3 \tfrac{h^3}{8} + \cdots$$

Dua kali persamaan kedua dikurangi persamaan pertama menghilangkan K_1. Hasilnya adalah rumus baru

$$N_2(h) = N_1\left(\tfrac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\tfrac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]$$

yang memenuhi $M = N_2(h) + \hat{K}_2 h^2 + \hat{K}_3 h^3 + \cdots$ sehingga galatnya berorde $O(h^2)$. Perhatikan bahwa K_1 tidak perlu diketahui; ia lenyap lewat kombinasi aljabar. Proses diulang: $N_2(h)$ dan $N_2(\tfrac{h}{2})$ digabung untuk menghilangkan suku h^2, dan seterusnya. Untuk galat yang memuat semua pangkat h, rumus umumnya adalah

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\tfrac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}$$

Hasil tiap tahap disusun dalam tabel segitiga: kolom pertama berisi $N_1(h), N_1(h/2), N_1(h/4), \ldots$ dan kolom berikutnya diperoleh dari dua entri bersebelahan di kolom sebelumnya.

Keadaan khusus yang sangat penting adalah galat yang hanya memuat pangkat genap: $M = N_1(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + \cdots$. Beda pusat untuk turunan dan aturan trapesium majemuk termasuk kelompok ini. Maka satu langkah ekstrapolasi menghilangkan h^2 dan menaikkan orde dari dua menjadi empat, langkah berikutnya menaikkan menjadi enam, dan seterusnya. Rumusnya menjadi

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\tfrac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

Kenaikan orde per langkah di sini dua tingkat sekaligus, sehingga ekstrapolasi sangat efisien. Jika rasio langkah bukan dua melainkan q, dan galat awal berorde h^p, kombinasinya menjadi $\frac{q^p N(h/q) - N(h)}{q^p - 1}$.

Beberapa hal praktis perlu diingat. Pertama, ekstrapolasi hanya valid bila bentuk galat memang seperti yang diasumsikan, yakni f cukup mulus; pada fungsi dengan singularitas, bentuk deret pangkat itu gagal. Kedua, ekstrapolasi mengurangi galat pemotongan, bukan galat pembulatan. Selisih dua hampiran yang berdekatan diperbesar oleh koefisien seperti $\frac{4}{3}$ atau $\frac{16}{15}$, sehingga galat pembulatan sedikit membesar; ekstrapolasi tidak dapat menyelamatkan hasil yang sudah didominasi pembulatan. Ketiga, selisih $N_j(h) - N_{j-1}(h)$ dapat dipakai sebagai taksiran galat tanpa mengetahui turunan.

Ekstrapolasi Richardson adalah fondasi bagi integrasi Romberg (Seksi 4.5), yang menerapkan tabel ekstrapolasi pada aturan trapesium. Ia juga dipakai pada penyelesaian persamaan diferensial, misalnya metode ekstrapolasi untuk masalah nilai awal.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Ekstrapolasi — Menggabungkan beberapa hampiran pada h yang berbeda untuk memperkirakan nilai pada $h \to 0$, dengan memanfaatkan bentuk galat yang diketahui.

Ekspansi galat asimtotik — Galat hampiran berbentuk $K_1 h^{\alpha_1} + K_2 h^{\alpha_2} + \cdots$ dengan pangkat yang naik. Bentuk inilah syarat agar Richardson bekerja.

Penghapusan suku utama — Kombinasi $\frac{q^p N(h/q) - N(h)}{q^p - 1}$ meniadakan suku Kh^p, sehingga orde galat naik tanpa mengetahui K.

Tabel ekstrapolasi — Susunan segitiga $N_j(h/2^k)$; kolom ke-j dihitung dari dua entri bersebelahan kolom ke-$(j-1)$, dengan satu evaluasi rumus dasar baru tiap baris.

Kasus galat genap — Bila galat hanya memuat $h^2, h^4, \ldots$, penyebut menjadi $4^{j-1} - 1$ dan tiap kolom menaikkan orde dua tingkat, jauh lebih cepat.

Taksiran galat gratis — Selisih dua entri bersebelahan dalam tabel menaksir galat entri yang lebih kasar, sehingga dapat dipakai sebagai kriteria berhenti.

Batas manfaat — Ekstrapolasi tidak menolong bila galat pembulatan dominan atau bila f tidak cukup mulus sehingga ekspansi galat tidak berlaku.

Ekstrapolasi tahap pertama (semua pangkat)

$$N_2(h) = N_1\left(\tfrac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\tfrac{h}{2}\right) - N_1(h)\right]$$

Rumus umum (semua pangkat)

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\tfrac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{2^{j-1} - 1}$$

Rumus umum (galat pangkat genap)

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\tfrac{h}{2}\right) + \frac{N_{j-1}(h/2) - N_{j-1}(h)}{4^{j-1} - 1}$$

Rasio langkah q, orde p

$$N(h) \to \frac{q^p N(h/q) - N(h)}{q^p - 1}$$

Algoritma: Ekstrapolasi Richardson (galat pangkat genap)

1. Pilih rumus dasar $N_1(h)$ yang galatnya berbentuk $K_1 h^2 + K_2 h^4 + \cdots$ dan langkah awal h.
2. Hitung kolom pertama: $N_1(h), N_1(h/2), \ldots, N_1(h/2^{m-1})$.
3. Untuk $j = 2, \ldots, m$ dan $k = j, \ldots, m$: $N_{k,j} = N_{k,j-1} + \frac{N_{k,j-1} - N_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$.
4. Entri diagonal $N_{m,m}$ adalah hasil terbaik, berorde $O(h^{2m})$. Selisih $|N_{m,m} - N_{m,m-1}|$ menaksir galatnya.
5. Berhenti bila selisih itu sudah di bawah toleransi, atau bila selisih mulai tumbuh (tanda galat pembulatan mendominasi).

Contoh 1: Beda maju untuk $\cos x$ di $x = 1$

Beda maju $N_1(h) = \frac{\cos(1+h) - \cos 1}{h}$ memiliki galat $O(h)$. Ekstrapolasikan hasil untuk $h = 0{,}2$ dan $h = 0{,}1$. Nilai eksak $-\sin 1 = -0{,}841471$.

Penyelesaian.

$N_1(0{,}2) = -0{,}889723$ dengan galat $0{,}048252$.

$N_1(0{,}1) = -0{,}867062$ dengan galat $0{,}025591$.

$N_2(0{,}2) = 2N_1(0{,}1) - N_1(0{,}2) = -0{,}844401$, galat $0{,}002930$.

Satu langkah ekstrapolasi menurunkan galat sekitar 9 kali. Bila ditambah $N_1(0{,}05) = -0{,}854625$, maka $N_2(0{,}1) = -0{,}842188$ dengan galat $0{,}000717$, kira-kira seperempat galat $N_2(0{,}2)$, sesuai orde $O(h^2)$.

Contoh 2: Tabel ekstrapolasi untuk beda pusat $\arctan x$ di $x = 1$

Beda pusat $N_1(h) = \frac{\arctan(1+h) - \arctan(1-h)}{2h}$ memiliki galat pangkat genap. Hitung untuk $h = 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1$, lalu ekstrapolasikan dua kali. Nilai eksak $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Penyelesaian.

Kolom pertama: $N_1(0{,}4) = 0{,}5126592$, $N_1(0{,}2) = 0{,}5032928$, $N_1(0{,}1) = 0{,}5008308$. Galatnya $0{,}0126592$; $0{,}0032928$; $0{,}0008308$ (turun kira-kira empat kali lipat tiap halving).

Kolom kedua: $N_2 = \frac{4N_1(h/2) - N_1(h)}{3}$ memberi $N_2(0{,}4) = 0{,}5001706$ dan $N_2(0{,}2) = 0{,}5000102$, galat $0{,}0001706$ dan $0{,}0000102$ (rasio kira-kira 16).

Kolom ketiga: $N_3(0{,}4) = N_2(0{,}2) + \frac{N_2(0{,}2) - N_2(0{,}4)}{15} = 0{,}49999948$, galat $0{,}00000052$.

Dari tiga hampiran orde dua yang galatnya sekitar 10^{-2} sampai 10^{-3}, kita memperoleh hampiran berorde enam dengan galat sekitar 10^{-6}.

Contoh 3: Rasio langkah tiga

Untuk beda pusat yang sama (galat $O(h^2)$), pakai $h = 0{,}3$ dan $h = 0{,}1$ (rasio $q = 3$, $p = 2$). Gabungkan dengan rumus $\frac{9N(h/3) - N(h)}{8}$.

Penyelesaian.

$N(0{,}3) = 0{,}5072912$ (galat $0{,}0072912$), $N(0{,}1) = 0{,}5008308$ (galat $0{,}0008308$).

Gabungan: $\frac{9(0{,}5008308) - (0{,}5072912)}{8} = 0{,}5000233$ dengan galat $0{,}0000233$. Penyebut $q^p - 1 = 8$ berasal dari menghapus suku Kh^2: $9 \cdot Kh^2/9 - Kh^2 = 0$.

Kesalahan umum

• Memakai penyebut $2^{j-1}-1$ padahal galat hanya berisi pangkat genap (atau sebaliknya). Penyebut harus cocok dengan pangkat suku yang dihapus; salah memilih menghasilkan hasil yang justru lebih buruk.

• Mencampur hampiran dengan rasio langkah yang tidak dicatat. Rumus $2N(h/2)-N(h)$ hanya benar bila langkahnya tepat h dan $h/2$.

• Menganggap ekstrapolasi menghilangkan galat pembulatan. Ia hanya meniadakan suku-suku pemotongan; galat pembulatan bahkan sedikit diperbesar oleh koefisien kombinasi.

• Menerapkan Richardson pada hampiran yang galatnya tidak berbentuk deret pangkat h (misalnya fungsi dengan titik singular), lalu heran hasilnya tidak membaik.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa kombinasi $2N_1(h/2)-N_1(h)$ menghapus suku K_1h tanpa kita perlu mengetahui nilai K_1?
2. Mengapa ekstrapolasi pada galat pangkat genap jauh lebih efektif daripada pada galat yang memuat semua pangkat? Hitung orde yang dicapai setelah tiga langkah pada kedua kasus.
3. Bagaimana selisih dua entri bersebelahan pada tabel dapat dipakai untuk menaksir galat tanpa mengetahui nilai eksak?
4. Apa yang terjadi pada tabel ekstrapolasi bila nilai $N_1(h)$ mengandung galat pembulatan yang acak?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Beda maju untuk e^x di $x=0$: $N_1(h)=\frac{e^h-1}{h}$ (galat $O(h)$, nilai eksak 1). Hitung $N_1(0{,}4)$, $N_1(0{,}2)$ dan ekstrapolasi $N_2(0{,}4)$.

Kunci: $N_1(0{,}4)=1{,}229562$, $N_1(0{,}2)=1{,}107014$, $N_2(0{,}4)=2N_1(0{,}2)-N_1(0{,}4)=0{,}984466$. Galat turun dari $0{,}107014$ menjadi $0{,}015534$.

2. Turunkan rumus ekstrapolasi bila galat berbentuk $K_1h^p+K_2h^{p+1}+\cdots$ dan hampiran dihitung pada h dan $\frac{h}{q}$.

Kunci: $M=N(h)+K_1h^p+\cdots$ dan $M=N(h/q)+K_1h^pq^{-p}+\cdots$. Kalikan persamaan kedua dengan q^p, kurangkan persamaan pertama: $(q^p-1)M=q^pN(h/q)-N(h)+O(h^{p+1})$, jadi $M\approx\frac{q^pN(h/q)-N(h)}{q^p-1}$.

3. Beda pusat $\sin x$ di $x=0{,}5$ dengan $h=0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}05$ lalu ekstrapolasi sampai kolom ketiga (galat pangkat genap). Bandingkan dengan $\cos 0{,}5$.

Kunci: $N_1=0{,}8717437;\ 0{,}8761207;\ 0{,}8772169$. $N_2=0{,}87757964;\ 0{,}87758238$. $N_3=0{,}87758256$. Nilai eksak $\cos 0{,}5=0{,}87758256$.

4. Hampiran berorde $O(h^2)$ memberi $N(0{,}1)=2{,}0301$ dan $N(0{,}05)=2{,}0075$. Perkirakan nilai limitnya dan taksir galat $N(0{,}05)$.

Kunci: $\frac{4(2{,}0075)-2{,}0301}{3}=2{,}0000$. Karena itu galat $N(0{,}05)$ kira-kira $2{,}0075-2{,}0000=0{,}0075$.

Steven Paulus Siahaan

4.3 Elements of Numerical Integration

Rujukan buku: halaman 193

Integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$ sering tidak dapat dihitung dengan antiturunan, entah karena antiturunannya tidak ada dalam bentuk fungsi elementer, entah karena f hanya diketahui lewat tabel. Kuadratur numerik menghampiri integral itu dengan jumlah berbobot nilai fungsi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Simpul x_i dan bobot a_i harus dipilih sedemikian rupa sehingga hampirannya baik. Pendekatan klasik adalah interpolasi: ambil simpul $x_0, \ldots, x_n$ di $[a,b]$, bentuk polinom interpolasi Lagrange $P_n(x) = \sum f(x_i)L_i(x)$, lalu integralkan polinom itu. Bobotnya otomatis $a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$, dan galatnya adalah integral dari suku galat interpolasi, $E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_i (x-x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$.

Bila simpulnya berjarak sama, hasilnya adalah rumus Newton-Cotes. Pada versi tertutup, ujung selang termasuk simpul ($x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$). Dua kasus paling dikenal adalah $n = 1$, aturan trapesium, dan $n = 2$, aturan Simpson:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \tfrac{h^3}{12} f''(\xi), \qquad h = b - a$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \tfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad h = \tfrac{b-a}{2}$$

Aturan trapesium menggantikan kurva dengan garis lurus sehingga eksak untuk polinom derajat ≤ 1. Hal yang menarik terjadi pada aturan Simpson: meski dibangun dari parabola, aturan ini juga eksak untuk polinom kubik, karena galatnya memuat turunan keempat, bukan ketiga. Gejala ini ditangkap oleh konsep derajat ketelitian (degree of precision), yaitu bilangan bulat terbesar m sehingga rumus eksak untuk x^k dengan semua $k = 0, 1, \ldots, m$. Trapesium berderajat 1, Simpson berderajat 3. Secara umum, rumus Newton-Cotes tertutup dengan n genap berderajat $n+1$, sedangkan dengan n ganjil berderajat n. Karena itu, rumus dengan n genap lebih menguntungkan daripada tetangganya yang ganjil.

Rumus tertutup lain yang berguna adalah aturan tiga-perdelapan Simpson ($n = 3$, galat $-\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$) dan aturan Boole ($n = 4$, $\frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]$ dengan galat $-\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$). Ada pula rumus Newton-Cotes terbuka, yang tidak memakai ujung selang: simpulnya $x_i = a + (i+1)h$ untuk $i = 0, \ldots, n$ dengan $h = \frac{b-a}{n+2}$. Contohnya aturan titik-tengah ($n = 0$): $\int_a^b f\,dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$ dengan x_0 titik tengah. Rumus terbuka berguna bila nilai di ujung tidak tersedia atau tak terdefinisi, misalnya pada integral tak wajar.

Perhatikan bahwa dalam aturan galat di atas, titik ξ tidak diketahui; yang berguna adalah batasnya, yakni nilai maksimum turunan terkait pada $[a,b]$. Juga, tanda galat bisa dibaca: untuk trapesium dengan $f'' > 0$ (fungsi cembung), hasil lebih besar dari nilai eksak, sedangkan galat titik-tengah berlawanan tanda.

Rumus Newton-Cotes berderajat tinggi jarang dipakai pada selang lebar. Bobotnya akhirnya muncul dengan tanda berganti dan makin besar sehingga rentan galat pembulatan, dan interpolasi polinom berjarak sama pada selang lebar dapat berosilasi. Karena itu orang memilih rumus berderajat rendah pada subselang kecil, yang disebut kuadratur majemuk (Seksi 4.4). Alternatif lain yang memilih simpul tak berjarak sama adalah kuadratur Gauss (Seksi 4.7).

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Kuadratur numerik — Hampiran integral tentu dengan jumlah berbobot $\sum a_i f(x_i)$ yang hanya memakai nilai fungsi di simpul-simpul terpilih.

Bobot interpolatif — Bila P_n polinom interpolasi Lagrange, bobotnya $a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$. Bobot ini tidak bergantung pada f.

Derajat ketelitian — Bilangan bulat terbesar m sehingga rumus eksak untuk semua polinom berderajat $\le m$ (cukup diuji pada $1, x, \ldots, x^m$).

Newton-Cotes tertutup dan terbuka — Tertutup memakai ujung selang sebagai simpul, terbuka tidak. Keduanya memakai simpul berjarak sama dan bobot dari integral polinom Lagrange.

Aturan trapesium — $\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]$ dengan galat $-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$. Eksak untuk fungsi linear.

Aturan Simpson — $\frac{h}{3}[f_0+4f_1+f_2]$, $h=\frac{b-a}{2}$, galat $-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$. Eksak sampai polinom kubik.

Aturan titik-tengah — Rumus terbuka $2hf(x_0)$ dengan x_0 titik tengah dan $h=\frac{b-a}{2}$; galatnya $+\frac{h^3}{3}f''(\xi)$, berlawanan tanda dengan trapesium dan sekitar setengah besarnya.

Bobot kuadratur interpolatif

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx, \qquad L_i(x) = \prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Aturan trapesium

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \tfrac{h^3}{12}f''(\xi), \quad h=b-a$$

Aturan Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \tfrac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad h=\tfrac{b-a}{2}$$

Aturan Simpson tiga-perdelapan

$$\int_a^b f\,dx = \tfrac{3h}{8}[f_0+3f_1+3f_2+f_3] - \tfrac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi), \quad h=\tfrac{b-a}{3}$$

Aturan Boole

$$\int_a^b f\,dx = \tfrac{2h}{45}[7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4] - \tfrac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi), \quad h=\tfrac{b-a}{4}$$

Aturan titik-tengah (terbuka)

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2hf(x_0) + \tfrac{h^3}{3}f''(\xi), \quad h=\tfrac{b-a}{2},\ x_0=a+h$$

Contoh 1: Trapesium, Simpson, dan titik-tengah untuk $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

Hampiri $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ dengan aturan trapesium, Simpson, dan titik-tengah. Nilai eksak (lewat fungsi galat) adalah $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(1) = 0{,}746824$. Bandingkan galatnya dengan batas teoretis.

Penyelesaian.

Nilai fungsi: $f(0) = 1$, $f(0{,}5) = 0{,}778801$, $f(1) = 0{,}367879$.

Trapesium ($h = 1$): $\frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = 0{,}683940$, galat $-0{,}062884$.

Simpson ($h = 0{,}5$): $\frac{0{,}5}{3}[f(0) + 4f(0{,}5) + f(1)] = 0{,}747180$, galat $0{,}000356$.

Titik-tengah ($h = 0{,}5$): $2hf(0{,}5) = 0{,}778801$, galat $0{,}031977$.

Batas galat: $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ dengan $\max|f''| = 2$ di $x = 0$; batas trapesium $\frac{1}{12} \cdot 2 = 0{,}1667$ dan batas titik-tengah $\frac{0{,}125}{3} \cdot 2 = 0{,}0833$. Untuk Simpson, $f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}$ dengan $\max|f^{(4)}| = 12$, sehingga batas $\frac{0{,}5^5}{90} \cdot 12 = 0{,}0042$. Galat sebenarnya semuanya berada di bawah batas. Trapesium menaksir terlalu kecil dan titik-tengah terlalu besar; galat titik-tengah kira-kira setengah galat trapesium, sesuai perbandingan koefisien $\frac{1}{24}$ dan $\frac{1}{12}$ pada f'' yang sama. Simpson jauh lebih akurat daripada keduanya.

Contoh 2: Derajat ketelitian aturan Simpson

Periksa pada $[0, 2]$ ($h = 1$) bahwa aturan Simpson eksak untuk x^3 tetapi tidak untuk x^4, dan cocokkan galatnya dengan rumus.

Penyelesaian.

Untuk $f(x) = x^3$: $\frac{1}{3}[0 + 4(1) + 8] = 4$ dan $\int_0^2 x^3 dx = \frac{2^4}{4} = 4$. Eksak.

Untuk $f(x) = x^4$: $\frac{1}{3}[0 + 4(1) + 16] = 6{,}66667$, sedangkan $\int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5} = 6{,}40000$. Eksak dikurangi hampiran $= 6{,}40000 - 6{,}66667 = -0{,}26667$.

Menurut rumus, $\int f = S - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$ dengan $f^{(4)} = 24$, jadi $\int f - S = -\frac{24}{90} = -0{,}26667$, cocok dengan selisih yang dihitung langsung. Maka derajat ketelitian Simpson adalah 3.

Contoh 3: Empat rumus tertutup untuk $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$

Hampiri $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ dengan trapesium, Simpson, Simpson tiga-perdelapan, dan Boole. Nilai eksak $\ln 2 = 0{,}693147$.

Penyelesaian.

Trapesium ($h = 1$): $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = 0{,}750000$, galat $0{,}056853$.

Simpson ($h = \frac{1}{2}$): $\frac{1}{6}(1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = 0{,}694444$, galat $0{,}001297$.

Tiga-perdelapan ($h = \frac{1}{3}$, simpul $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$): $0{,}693750$, galat $0{,}000603$.

Boole ($h = \frac{1}{4}$, lima simpul): $0{,}693175$, galat $0{,}000027$.

Galat mengecil cepat dengan bertambahnya derajat, sesuai urutan orde h^3, h^5, h^5, h^7 pada koefisien galat masing-masing. Perhatikan bahwa Simpson dan tiga-perdelapan sama-sama berderajat ketelitian 3 dan galatnya berorde sama, tetapi Simpson memakai satu titik lebih sedikit, sehingga lebih disukai.

Kesalahan umum

• Lupa membedakan h pada tiap rumus: $h = b - a$ untuk trapesium tetapi $h = \frac{b-a}{2}$ untuk Simpson dan $h = \frac{b-a}{3}$ untuk tiga-perdelapan. Salah h memberi hasil salah dengan faktor yang bukan 2.

• Menyangka aturan Simpson berderajat ketelitian 2 karena memakai parabola. Derajatnya 3 karena suku $h^3 f'''$ hilang dengan simetri.

• Menaikkan derajat Newton-Cotes pada selang lebar dengan harapan akurasi bertambah. Bobot berganti tanda dan interpolasi berjarak sama berosilasi, sehingga hasil bisa memburuk.

• Menganggap ξ dapat dihitung. Titik ξ hanya dijamin ada; yang dipakai adalah batas turunan pada seluruh selang.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa aturan Simpson dengan tiga simpul eksak untuk kubik, padahal polinom interpolasinya hanya berderajat dua? Telusuri peran simetri simpul.
2. Mengapa galat aturan titik-tengah berlawanan tanda dengan galat trapesium, dan apa implikasinya untuk menggabungkan keduanya?
3. Apa keuntungan dan kerugian rumus terbuka dibandingkan rumus tertutup yang berderajat ketelitian sama?
4. Mengapa rumus Newton-Cotes berderajat tinggi jarang dipakai dalam praktik, padahal derajat ketelitiannya tinggi?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hampiri $\int_0^1 xe^{-x}dx$ dengan trapesium dan Simpson. Nilai eksak $1 - \frac{2}{e}$.

Kunci: Trapesium: $\frac{1}{2}[0 + e^{-1}] = 0{,}183940$. Simpson: $\frac{0{,}5}{3}[0 + 4(0{,}5)e^{-0{,}5} + e^{-1}] = 0{,}263490$. Eksak $0{,}264241$. Galat trapesium $0{,}080301$, Simpson $0{,}000751$.

2. Gunakan aturan titik-tengah pada $\int_0^1 x^2 dx$ ($h = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$). Cocokkan galatnya dengan rumus $\frac{h^3}{3} f''(\xi)$.

Kunci: Hampiran $= 2hf(x_0) = 1 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}25$, eksak $\frac{1}{3}$, jadi $\int f - \text{hampiran} = 0{,}083333$. Rumus: $\frac{(1/2)^3}{3} \cdot 2 = \frac{1}{12} = 0{,}083333$. Cocok.

3. Tentukan konstanta c_0, c_1 sehingga $\int_0^1 f(x)\,dx \approx c_0 f(0) + c_1 f(\frac{2}{3})$ eksak untuk $f = 1$ dan $f = x$. Periksa apakah rumus itu eksak juga untuk x^2 dan x^3.

Kunci: $c_0 + c_1 = 1$ dan $\frac{2}{3}c_1 = \frac{1}{2}$, jadi $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_0 = \frac{1}{4}$. Untuk x^2: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$, eksak. Untuk x^3: $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{4}$, tidak eksak. Derajat ketelitiannya 2.

4. Mengapa aturan Boole ($n = 4$) mempunyai derajat ketelitian 5, bukan 4? Gunakan bentuk galatnya.

Kunci: Galatnya sebanding dengan $f^{(6)}(\xi)$, yang nol untuk semua polinom berderajat ≤ 5. Jadi rumus eksak sampai derajat 5 dan gagal untuk x^6. Ini mengikuti aturan: n genap memberi derajat $n+1$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

4.4 Composite Numerical Integration

Rujukan buku: halaman 203

Aturan Newton-Cotes berderajat tinggi tidak cocok untuk selang lebar: koefisiennya sukar dihitung, bobotnya berganti tanda, dan interpolasi polinom dengan simpul berjarak sama pada selang panjang dapat berosilasi. Jalan keluar yang paling umum dipakai adalah pendekatan sepotong-sepotong (piecewise): bagi $[a, b]$ menjadi banyak subselang kecil, pakai rumus berderajat rendah (trapesium, Simpson, atau titik-tengah) pada tiap subselang, lalu jumlahkan. Hasilnya adalah kuadratur majemuk (composite).

Misalkan $[a, b]$ dibagi menjadi n bagian sama panjang, $h = \frac{b-a}{n}$ dan $x_j = a + jh$. Menerapkan aturan trapesium pada tiap $[x_{j-1}, x_j]$, titik dalam muncul dua kali, sehingga

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\mu)$$

untuk suatu $\mu \in (a, b)$ bila $f \in C^2[a, b]$. Aturan Simpson majemuk memerlukan n genap karena Simpson memakai dua subselang sekaligus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$$

dengan $f \in C^4[a, b]$. Bobot berselang-seling $1, 4, 2, 4, \ldots, 2, 4, 1$ perlu dihafal dengan pola ini. Aturan titik-tengah majemuk juga ada: untuk n genap, dengan $h = \frac{b-a}{n+2}$ dan $x_j = a + (j+1)h$, rumusnya adalah $2h\sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j})$ dengan galat $\frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu)$; tiap titik evaluasi berada di tengah sepasang subselang.

Teorema nilai antara dipakai untuk menyatukan suku-suku $f^{(k)}(\xi_j)$ yang berbeda pada tiap subselang menjadi satu nilai $f^{(k)}(\mu)$, karena rata-rata nilai turunan berada di antara minimum dan maksimumnya. Konsekuensi penting: galat trapesium majemuk berorde $O(h^2)$ dan galat Simpson majemuk berorde $O(h^4)$. Menggandakan n memperkecil galat trapesium sekitar 4 kali dan galat Simpson sekitar 16 kali, sehingga Simpson jauh lebih efisien untuk fungsi mulus.

Salah satu kegunaan utama rumus galat adalah memilih n sebelum menghitung. Bila $M_2 \geq |f''|$ pada $[a, b]$, jaminan galat trapesium $\leq \varepsilon$ dipenuhi bila $\frac{(b-a)h^2}{12}M_2 \leq \varepsilon$, dan analoginya untuk Simpson dengan M_4 dan $\frac{(b-a)h^4}{180}$. Batas ini bersifat konservatif (jaminan, bukan prediksi), sehingga n yang sebenarnya diperlukan bisa lebih kecil.

Aspek lain yang menguntungkan: kuadratur majemuk stabil terhadap galat pembulatan. Jika tiap nilai f mengandung galat paling besar ε, jumlah mutlak koefisien dalam Simpson majemuk adalah $\frac{h}{3} \cdot 3n = nh = b - a$, sehingga galat total akibat pembulatan paling banyak $(b-a)\varepsilon$ dan tidak membesar ketika n ditambah. Ini kontras dengan turunan numerik (Seksi 4.1), yang memperbesar galat. Kelemahan metode ini adalah n harus ditentukan di muka dan hasil tidak adaptif; fungsi yang bervariasi cepat hanya di sebagian selang akan memboroskan evaluasi. Hal itu ditangani oleh kuadratur adaptif (Seksi 4.6). Ekstrapolasi Richardson pada trapesium majemuk menghasilkan integrasi Romberg (Seksi 4.5), yang menaikkan orde tanpa menurunkan rumus baru.

Konsep kunci

Kuadratur majemuk — Selang dibagi menjadi banyak subselang dan rumus berderajat rendah diterapkan pada tiap bagian, lalu hasilnya dijumlahkan.

Trapesium majemuk — Bobot $\frac{h}{2}, h, \ldots, h, \frac{h}{2}$. Galat $-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\mu)$, berorde $O(h^2)$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Simpson majemuk — Memerlukan n genap dengan bobot $\frac{h}{3}\times(1,4,2,4,\ \dots,2,4,1)$. Galat $-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\mu)$, berorde $O(h^4)$.

Titik-tengah majemuk — Rumus terbuka $2h\sum f(x_{2j})$ dengan $h=\frac{b-a}{n+2}$ dan n genap; galat $\frac{(b-a)h^2}{6}f''(\mu)$.

Memilih n dari batas galat — Dengan batas M_2 atau M_4 pada turunan, galat yang dijamin dapat ditulis sebagai fungsi h, lalu n dicari dari syarat $\le\varepsilon$.

Stabilitas numerik — Jumlah mutlak bobot sama dengan $b-a$, sehingga galat pembulatan pada nilai fungsi tidak diperbesar ketika n ditambah.

Peran teorema nilai antara — Digunakan untuk mengganti $\sum f^{(k)}(\xi_j)$ dengan $n\,f^{(k)}(\mu)$ karena rata-rata nilai turunan berada di antara nilai minimum dan maksimumnya.

Trapesium majemuk

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(b)\right],\quad E=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\mu)$$

Simpson majemuk (n genap)

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+2\sum_{j=1}^{n/2-1}f(x_{2j})+4\sum_{j=1}^{n/2}f(x_{2j-1})+f(b)\right]$$

Galat Simpson majemuk

$$E=-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\mu)$$

Titik-tengah majemuk (n genap)

$$\int_a^b f\,dx \approx 2h\sum_{j=0}^{n/2}f(x_{2j}),\quad h=\frac{b-a}{n+2},\ x_j=a+(j+1)h$$

Galat titik-tengah majemuk

$$E=\frac{b-a}{6}h^2f''(\mu)$$

Algoritma: Simpson majemuk dengan pemilihan n

1. Tentukan toleransi ε dan cari batas $M_4\ge|f^{(4)}(x)|$ pada $[a,b]$.
2. Cari n genap terkecil dengan $\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4\le\varepsilon$, sebab $h=\frac{b-a}{n}$.
3. Hitung $h=\frac{b-a}{n}$ dan $x_j=a+jh$.
4. Hitung $S_{\text{ujung}}=f(x_0)+f(x_n)$, $S_{\text{ganjil}}=\sum f(x_{2j-1})$, $S_{\text{genap}}=\sum_{j=1}^{n/2-1}f(x_{2j})$.
5. Hasil: $\frac{h}{3}[S_{\text{ujung}}+2S_{\text{genap}}+4S_{\text{ganjil}}]$.

Contoh 1: Tiga aturan majemuk untuk $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$

Hampiri $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 2 = 1{,}1071487$ dengan trapesium majemuk dan Simpson majemuk ($n=8$, $h=0{,}25$) serta titik-tengah majemuk ($n=8$, $h=0{,}2$).

Penyelesaian.

Trapesium: $1{,}1063166$, galat $-0{,}0008321$.

Simpson: $1{,}1071401$, galat $-0{,}0000086$.

Titik-tengah memakai simpul $0{,}2;\ 0{,}6;\ 1{,}0;\ 1{,}4;\ 1{,}8$ (lima evaluasi): $2(0{,}2)\sum f = 1{,}1082078$, galat $0{,}0010591$.

Simpson jauh lebih akurat. Titik-tengah menaksir terlalu besar sedangkan trapesium terlalu kecil, karena fungsi ini cembung di dekat $x=0$ hingga $x \approx 0{,}58$ dan cekung sesudahnya; galat yang saling berlawanan itu merupakan gejala umum dan menjadi dasar cara menggabungkan keduanya.

Contoh 2: Memilih n untuk toleransi 10^{-5}

Untuk $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$, tentukan n yang menjamin galat $< 10^{-5}$ untuk trapesium majemuk dan untuk Simpson majemuk. Diketahui $\max|f''| = 2$ dan $\max|f^{(4)}| = 24$ pada $[0,2]$ (keduanya terjadi di $x=0$).

Penyelesaian.

Trapesium: galat $\le \frac{2h^2}{12}\cdot 2 = \frac{h^2}{3}$ dengan $h = \frac{2}{n}$, yaitu $\frac{4}{3n^2} < 10^{-5}$ sehingga $n > 365{,}1$, jadi $n = 366$. Galat sebenarnya dengan $n=366$ adalah $0{,}00000040$ (batas $0{,}00000995$).

Simpson: galat $\le \frac{2h^4}{180}\cdot 24 = \frac{4{,}2667}{n^4} < 10^{-5}$ sehingga $n > 25{,}56$; karena n harus genap, $n = 26$. Galat sebenarnya $0{,}00000004$ (batas $0{,}00000934$).

Perbedaan kebutuhan sangat mencolok: Simpson memerlukan sekitar 26 subselang, trapesium 366. Batas teoretis konservatif; galat Simpson sebenarnya sudah di bawah 10^{-5} mulai $n=8$.

Contoh 3: Menguji orde konvergensi dengan menggandakan n

Untuk integral yang sama, hitung galat trapesium dan Simpson majemuk dengan $n = 2, 4, 8, 16$ dan periksa rasio galat berturut-turut.

Penyelesaian.

$n=2$: galat trapesium $0{,}0071487$; galat Simpson $0{,}0404821$.

$n=4$: galat trapesium $0{,}0033026$, rasio 2,16; galat Simpson $0{,}0020205$, rasio 20,04.

$n=8$: galat trapesium $0{,}0008321$, rasio 3,97; galat Simpson $0{,}0000086$, rasio 235,12.

$n=16$: galat trapesium $0{,}0002083$, rasio 4,00; galat Simpson $0{,}0000003$, rasio 27,57.

Rasio galat trapesium mendekati $4 = 2^2$ dan rasio galat Simpson mendekati $16 = 2^4$ ketika n membesar, sesuai orde $O(h^2)$ dan $O(h^4)$. Rasio yang mendekati angka itu merupakan cara praktis untuk memeriksa bahwa program benar dan bahwa f cukup mulus.

Kesalahan umum

• Memakai Simpson majemuk dengan n ganjil. Rumus memasangkan subselang, sehingga n harus genap.

• Salah pola bobot, misalnya memberi bobot 2 pada semua titik dalam atau memberi bobot 4 pada titik genap. Titik berindeks ganjil berbobot 4, titik dalam berindeks genap berbobot 2, ujung berbobot 1.

• Memakai $h = \frac{b-a}{n}$ pada titik-tengah majemuk. Pada rumus majemuk titik-tengah versi Newton-Cotes terbuka, $h = \frac{b-a}{n+2}$ dan n genap; jumlah subselang berbeda.

• Menganggap batas galat sebagai galat sebenarnya. Batas memakai maksimum turunan di seluruh selang sehingga umumnya terlalu pesimis, terutama untuk fungsi yang turunannya besar hanya di ujung.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa kuadratur majemuk stabil terhadap galat pembulatan walaupun n sangat besar, sedangkan turunan numerik tidak?
2. Bagaimana Anda menaksir galat Simpson majemuk tanpa mengetahui $f^{(4)}$? Pikirkan perbandingan hasil untuk n dan $2n$.
3. Apa yang terjadi pada orde konvergensi Simpson majemuk bila $f^{(4)}$ tidak ada atau tak terbatas di salah satu titik pada $[a, b]$?
4. Kapan aturan trapesium majemuk lebih menguntungkan daripada Simpson majemuk, misalnya untuk fungsi periodik pada satu periode penuh?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ dengan Simpson majemuk $n = 4$ dan bandingkan dengan trapesium majemuk $n = 4$ serta nilai eksak $0{,}746824$.

Kunci: Simpson ($h = 0{,}25$): $0{,}746855$, galat $0{,}000031$. Trapesium: $0{,}742984$, galat $-0{,}003840$. Nilai eksak $0{,}746824$.

2. Tentukan n terkecil yang menjamin galat $< 10^{-4}$ untuk $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ memakai trapesium majemuk dan Simpson majemuk. Gunakan $\max|f''| = 2$ dan $\max|f^{(4)}| = 24$ pada $[1, 3]$.

Kunci: Trapesium: $\frac{2h^2}{12} \cdot 2 = \frac{h^2}{3} < 10^{-4}$ sehingga $h < 0{,}01732$ dan $n > 115{,}5$, jadi $n = 116$. Simpson: $\frac{2h^4}{180} \cdot 24 = \frac{4h^4}{15} < 10^{-4}$ sehingga $h < 0{,}1392$ dan $n > 14{,}37$, jadi $n = 16$ (genap). Galat sebenarnya: trapesium $0{,}0000220$, Simpson $0{,}00000775$, keduanya di bawah 10^{-4}.

3. Buktikan bahwa jumlah mutlak koefisien Simpson majemuk sama dengan $b - a$, lalu simpulkan batas pengaruh galat pembulatan ε pada tiap nilai fungsi.

Kunci: Jumlahnya $\frac{h}{3}[1 + 2(\frac{n}{2} - 1) + 4 \cdot \frac{n}{2} + 1] = \frac{h}{3} \cdot 3n = nh = b - a$. Jadi galat total akibat pembulatan paling banyak $(b - a)\varepsilon$, tidak bergantung pada n.

4. Hitung $\int_0^1 x^2\,dx$ dengan titik-tengah majemuk $n = 2$ ($h = 0{,}25$) dan cocokkan dengan galat $\frac{b-a}{6} h^2 f''(\mu)$.

Kunci: Simpul $x_0 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}75$: $2(0{,}25)(0{,}0625 + 0{,}5625) = 0{,}31250$; eksak $\frac{1}{3}$, jadi galat hampiran $= 0{,}020833$. Rumus: $\frac{1}{6}(0{,}0625)(2) = 0{,}020833$. Cocok.

Steven Paulus Siahaan

4.5 Romberg Integration

Rujukan buku: halaman 213

Aturan trapesium majemuk mudah dipakai tetapi hanya berorde $O(h^2)$, sehingga untuk akurasi tinggi diperlukan banyak subselang. Integrasi Romberg memperbaikinya tanpa menambah rumus baru: hasil trapesium majemuk dengan jumlah subselang yang terus digandakan, $n = 1, 2, 4, 8, \ldots$, diekstrapolasi dengan cara Richardson dari Seksi 4.2. Hampir semua evaluasi fungsi yang sudah dikerjakan dipakai ulang, sehingga biayanya hanya sedikit lebih besar daripada trapesium majemuk terakhir.

Dasarnya adalah bentuk galat trapesium majemuk untuk fungsi yang cukup mulus. Bila $f \in C^{\infty}[a,b]$ dan $h = \frac{b-a}{n}$, maka galatnya dapat diuraikan sebagai deret yang hanya memuat pangkat genap h:

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \cdots$$

dengan konstanta K_i yang bergantung pada turunan ganjil f di titik ujung a dan b, tetapi tidak bergantung pada h. Karena hanya ada pangkat genap, setiap ekstrapolasi menaikkan orde sebanyak dua, bukan satu, dan itulah yang membuat tabel Romberg sangat efisien.

Notasikan $R_{k,1}$ sebagai trapesium majemuk dengan 2^{k-1} subselang, jadi $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$. Nilai pertama adalah $R_{1,1} = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$. Nilai berikutnya tidak perlu dihitung dari nol: titik-titik lama tetap dipakai dan hanya titik tengah yang baru perlu dievaluasi, sehingga

$$R_{k,1} = \tfrac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (i - \tfrac{1}{2}) h_{k-1}\right) \right], \quad k \geq 2.$$

Kolom-kolom berikutnya diperoleh dengan ekstrapolasi. Karena galatnya berpangkat $h^2, h^4, \ldots$ dan langkah dibagi dua, rumus pada kolom j memakai pembagi $4^{j-1} - 1$:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad k \geq j \geq 2.$$

Jadi kolom kedua ($j = 2$) memakai pembagi 3 dan hasilnya sama dengan aturan Simpson majemuk; kolom ketiga memakai pembagi 15 dan sama dengan aturan Boole. Kolom-kolom selanjutnya (pembagi $63, 255, \ldots$) tidak lagi bertepatan dengan aturan Newton-Cotes yang lazim. Kolom ke-j memiliki galat $O(h^{2j})$. Hasilnya disusun dalam tabel segitiga bawah: baris ke-k memuat $R_{k,1}, \ldots, R_{k,k}$, dan elemen diagonal $R_{k,k}$ biasanya yang terbaik.

Kriteria berhenti yang lazim: bandingkan dua elemen diagonal berturutan dan berhenti bila $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < \varepsilon$, atau bila banyak baris maksimum tercapai. Kelebihan metode ini adalah akurasi tinggi dengan pemrograman yang singkat, pemakaian ulang evaluasi fungsi, dan kemudahan menaikkan ketelitian dengan menambah satu baris. Kekurangannya: hasilnya bergantung pada keberadaan uraian galat berpangkat genap, yang mengharuskan f cukup mulus pada $[a,b]$. Bila f atau turunannya punya singularitas (misalnya $\sqrt{x}$ di 0), ekstrapolasi tidak menaikkan orde seperti yang diharapkan. Bahkan untuk fungsi mulus, kolom paling kanan tidak selalu paling akurat, sebagaimana akan terlihat pada Contoh 1.

Hubungan dengan seksi lain: Seksi 4.2 menyediakan teknik ekstrapolasinya, Seksi 4.4 menyediakan trapesium majemuk sebagai bahan dasar, dan Seksi 4.6 (kuadratur adaptif) serta 4.7 (kuadratur Gauss) menawarkan jalan lain untuk memperoleh akurasi tinggi dengan sedikit evaluasi fungsi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Ekstrapolasi Richardson pada trapesium — Galat trapesium majemuk berbentuk $K_1 h^2 + K_2 h^4 + \cdots$. Menggabungkan dua hasil dengan h dan $h/2$ menghapus suku h^2, lalu seterusnya suku h^4, h^6, dan lainnya.

Tabel Romberg — Tabel segitiga $R_{k,j}$. Kolom pertama adalah trapesium majemuk dengan 2^{k-1} subselang; kolom j berorde $O(h^{2j})$.

Pemakaian ulang evaluasi — Menggandakan n hanya menambah evaluasi pada titik tengah subselang lama. Jumlah evaluasi total untuk $R_{k,1}$ adalah $2^{k-1}+1$.

Kaitan dengan Simpson dan Boole — Kolom kedua tabel Romberg sama dengan Simpson majemuk, dan kolom ketiga sama dengan aturan Boole majemuk. Mulai kolom keempat tidak ada nama klasik.

Uraian galat berpangkat genap — Syarat utama metode ini: f cukup mulus (misalnya C^∞) sehingga galat trapesium punya deret dalam h^2. Tanpa itu, kolom ekstrapolasi tidak menaikkan orde seperti klaim.

Kriteria berhenti — Hentikan bila $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < \varepsilon$ atau banyak baris maksimum tercapai. Perbandingan diagonal adalah taksiran galat praktis, bukan batas yang pasti.

Batas praktis — Untuk baris yang sangat besar, galat pembulatan dan koefisien galat yang membesar bisa membuat kolom paling kanan tidak lebih baik daripada kolom sebelumnya.

Nilai awal

$$R_{1,1} = \tfrac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

Rekursi trapesium (titik tengah baru saja)

$$R_{k,1} = \tfrac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\big(a + (i-\tfrac{1}{2})h_{k-1}\big)\right], \quad h_k = \tfrac{b-a}{2^{k-1}}$$

Ekstrapolasi Romberg

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$$

Uraian galat trapesium

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(h) + K_1 h^2 + K_2 h^4 + K_3 h^6 + \cdots$$

Banyak evaluasi fungsi

$$N_k = 2^{k-1} + 1$$

Algoritma: Integrasi Romberg

1. Masukkan f, a, b, toleransi ε, dan banyak baris maksimum K. Hitung $R_{1,1} = \tfrac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$.

2. Untuk $k = 2, 3, \ldots, K$: tetapkan $h = \frac{b-a}{2^{k-2}}$ (lebar subselang pada baris sebelumnya) dan hitung $R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (i - \tfrac{1}{2})h\right)\right]$.
3. Untuk $j = 2, \ldots, k$: hitung $R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$.
4. Jika $|R_{k,k} - R_{k-1,k-1}| < \varepsilon$, keluarkan $R_{k,k}$ dan berhenti.
5. Bila K baris habis tanpa memenuhi kriteria, laporkan bahwa toleransi belum tercapai dan berikan $R_{K,K}$ beserta selisih terakhir.

Contoh 1: Tabel Romberg untuk $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Hitung $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ dengan tabel Romberg empat baris ($n = 1, 2, 4, 8$) dan bandingkan dengan nilai eksak $\frac{\pi}{4} = 0{,}7853982$.

Penyelesaian.

Kolom pertama (trapesium majemuk):

$R_{1,1} = 0{,}7500000$, $R_{2,1} = 0{,}7750000$, $R_{3,1} = 0{,}7827941$, $R_{4,1} = 0{,}7847471$.

Kolom kedua, $R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$:

$R_{2,2} = 0{,}7833333$, $R_{3,2} = 0{,}7853922$, $R_{4,2} = 0{,}7853981$.

Kolom ketiga, pembagi 15: $R_{3,3} = 0{,}7855294$, $R_{4,3} = 0{,}7853985$.

Kolom keempat, pembagi 63: $R_{4,4} = 0{,}7853964$.

Galat baris terakhir: $R_{4,1}$ sekitar $6{,}5 \times 10^{-4}$; $R_{4,2}$ sekitar $3{,}8 \times 10^{-8}$; $R_{4,3}$ sekitar $3{,}6 \times 10^{-7}$; $R_{4,4}$ sekitar $1{,}7 \times 10^{-6}$.

Dengan hanya 9 evaluasi fungsi, ekstrapolasi menurunkan galat dari 10^{-4} ke 10^{-8}. Perhatikan pula bahwa pada contoh ini kolom kedua ($R_{4,2}$) malah lebih akurat daripada kolom keempat: suku-suku galat orde tinggi untuk fungsi ini tidak mengecil secepat yang dibayangkan, dan galat pembulatan ikut bermain. Karena itu elemen paling kanan tidak otomatis yang terbaik; selisih antar-elemen perlu diperhatikan.

Contoh 2: Rekursi dan perhitungan tangan untuk $\int_1^2 \ln x \, dx$

Hitung $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{2,2}$, $R_{3,1}$, $R_{3,2}$, $R_{3,3}$ untuk $\int_1^2 \ln x \, dx$. Nilai eksak $2\ln 2 - 1 = 0{,}3862944$.

Penyelesaian.

$R_{1,1} = \frac{1}{2}[\ln 1 + \ln 2] = 0{,}3465736$.

Untuk $R_{2,1}$ dengan rekursi, $h_1 = 1$ dan hanya titik tengah $x = 1{,}5$ yang baru:
$R_{2,1} = \frac{1}{2}[R_{1,1} + 1 \cdot \ln 1{,}5] = \frac{1}{2}[0{,}3465736 + 0{,}4054651] = 0{,}3760193$.

$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = 0{,}3760193 + 0{,}0098152 = 0{,}3858346$.

Untuk $R_{3,1}$ dengan $h_2 = 0{,}5$ titik baru adalah $1{,}25$ dan $1{,}75$:
$R_{3,1} = \frac{1}{2}[0{,}3760193 + 0{,}5(\ln 1{,}25 + \ln 1{,}75)] = 0{,}3836995$.

$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = 0{,}3862596$.

$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15} = 0{,}3862879$.

Galat sebenarnya: $R_{3,1} \approx 2{,}6 \times 10^{-3}$, $R_{3,2} \approx 3{,}5 \times 10^{-5}$, $R_{3,3} \approx 6{,}5 \times 10^{-6}$. Hanya 5 evaluasi fungsi ($1;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2$) yang diperlukan untuk seluruh tabel.

Contoh 3: Ketika f tidak mulus: $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

Bandingkan galat $R_{k,1}$ dan $R_{k,k}$ untuk $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$ dengan $k = 1,\ \ldots,\ 5$.

Penyelesaian.

Galat trapesium $R_{k,1}$: $0{,}16667;\ 0{,}06311;\ 0{,}02338;\ 0{,}00854;\ 0{,}00309$.

Galat diagonal $R_{k,k}$: $0{,}16667;\ 0{,}02860;\ 0{,}00891;\ 0{,}00306;\ 0{,}00107$.

Rasio galat trapesium berturutan menuju sekitar $2{,}7$ ($\approx 2^{3/2}$), bukan 4 seperti pada fungsi mulus, sebab f' tak terbatas di $x = 0$ sehingga galatnya berorde $h^{3/2}$, bukan h^2. Ekstrapolasi tetap memperbaiki hasil sekitar 3 kali lipat, tetapi jauh dari perbaikan dramatis pada fungsi mulus, karena rumus ekstrapolasi dirancang untuk uraian $h^2, h^4, \ldots$ dan bukan untuk $h^{3/2}$. Pada kasus seperti ini, ubah variabel (misalnya $x = t^2$) agar integran menjadi mulus sebelum memakai Romberg.

Kesalahan umum

• Menganggap elemen paling kanan $R_{k,k}$ selalu paling akurat. Pada fungsi tertentu galat pembulatan atau koefisien galat yang membesar membuat kolom ke-j lebih buruk daripada kolom sebelumnya; periksa selisih antar-elemen.

• Memakai pembagi yang salah pada ekstrapolasi, misalnya $2^j - 1$ alih-alih $4^{j-1} - 1$. Kolom kedua memakai 3, ketiga 15, keempat 63, karena galat berpangkat genap dari h^2.

• Mengevaluasi ulang seluruh titik pada setiap baris trapesium, sehingga biayanya berlipat ganda; yang benar hanya titik tengah baru yang dihitung dan hasil baris sebelumnya dipakai kembali.

• Memakai Romberg pada integran yang tidak mulus (singularitas di titik ujung, loncatan turunan) tanpa menyadari bahwa orde yang dijanjikan tidak berlaku; kolom ekstrapolasi bisa hanya memberi perbaikan kecil.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa uraian galat trapesium hanya memuat pangkat genap h, dan apa akibatnya bagi laju kenaikan orde pada tiap kolom tabel Romberg? Apa yang terjadi jika ada suku ganjil?
2. Tunjukkan (atau jelaskan secara aljabar) bahwa kolom kedua tabel Romberg identik dengan aturan Simpson majemuk. Mengapa kolom ketiga identik dengan aturan Boole?
3. Bandingkan Romberg dengan kuadratur Gauss dan kuadratur adaptif dalam hal jumlah evaluasi fungsi, kebutuhan kehalusan integran, dan kemudahan memperkirakan galat. Kapan Anda memilih yang mana?
4. Mengapa Romberg dengan banyak baris tidak dapat dipercaya untuk integran dengan singularitas seperti $\sqrt{x}$ di 0? Perubahan variabel apa yang memperbaikinya?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $\int_0^1 x^3\,dx$, hitung $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, dan $R_{2,2}$. Apakah $R_{2,2}$ eksak? Jelaskan.

Kunci: $R_{1,1} = \frac{1}{2}(0+1) = 0{,}5$. $R_{2,1} = \frac{1}{2}[0{,}5 + 1\cdot 0{,}5^3] = 0{,}3125$. $R_{2,2} = 0{,}3125 + \frac{0{,}3125 - 0{,}5}{3} = 0{,}25$. Ya, eksak ($\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$), karena $R_{2,2}$ sama dengan Simpson yang berderajat ketelitian 3.

2. Untuk $\int_0^2 x^2\,dx$, hitung $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{2,2}$ dan bandingkan dengan nilai eksak.

Kunci: $R_{1,1} = \frac{2}{2}(0+4) = 4$. $R_{2,1} = \frac{1}{2}[4 + 2\cdot 1^2] = 3$. $R_{2,2} = 3 + \frac{3-4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}6667$, tepat sama dengan $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$.

3. Dalam tabel Romberg diketahui $R_{2,2} = 2{,}1000$ dan $R_{3,2} = 2{,}0040$. Hitung $R_{3,3}$.

Kunci: $R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15} = 2{,}0040 + \frac{-0{,}0960}{15} = 2{,}0040 - 0{,}0064 = 1{,}9976$.

4. Berapa banyak evaluasi fungsi yang diperlukan untuk menghitung seluruh tabel sampai baris $k = 6$? Berapa jika tiap trapesium dihitung dari awal tanpa memakai ulang?

Kunci: Dengan pemakaian ulang: $2^5 + 1 = 33$ evaluasi (baris keenam memakai $n = 32$ subselang). Tanpa pemakaian ulang: $2 + 3 + 5 + 9 + 17 + 33 = 69$ evaluasi, sekitar dua kali lipat.

Web by: Steven Paulus Siahaan

4.6 Adaptive Quadrature Methods

Rujukan buku: halaman 220

Rumus komposit seperti aturan Simpson komposit memakai simpul berjarak sama. Itu boros bila integran berperilaku tidak seragam: di satu bagian selang fungsi berosilasi atau berubah tajam sehingga perlu langkah kecil, sedangkan di bagian lain fungsi nyaris mulus dan langkah besar sudah cukup. Dengan langkah seragam, kita terpaksa memakai langkah terkecil di mana-mana, atau menerima galat besar di daerah sulit. Kuadratur adaptif menyelesaikan masalah ini dengan memilih panjang subselang secara otomatis berdasarkan perilaku fungsi itu sendiri, sehingga galat terbagi kira-kira merata dan jumlah evaluasi fungsi tetap kecil.

Ide dasarnya memakai aturan Simpson pada $[a, b]$ dengan titik tengah $c = \frac{a+b}{2}$:

$$S(a,b) = \tfrac{b-a}{6}\big[f(a) + 4f(c) + f(b)\big]$$

Kita hitung hampiran ini satu kali pada seluruh selang, lalu dua kali pada dua separuhnya, yaitu $S(a,c) + S(c,b)$. Selisih kedua hampiran itu memberi taksiran galat tanpa perlu mengetahui turunan keempat f. Alasannya: galat Simpson pada selang selebar h berbanding lurus dengan $h^5 f^{(4)}(\xi)$. Bila $f^{(4)}$ dianggap hampir konstan pada selang, membagi dua selang memperkecil galat tiap separuh sebesar faktor $2^5 = 32$, dan jumlah galat dua separuh menjadi $\frac{1}{16}$ dari galat semula. Dari sini diperoleh

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(a,c) - S(c,b) \right| \approx \tfrac{1}{15}\,|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)|$$

Jadi, jika $|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)| < 15\varepsilon$, galat gabungan separuh-separuh diharapkan di bawah ε dan subselang itu diterima. Bila tidak, subselang dibelah dan prosedur diulang pada tiap separuh dengan toleransi $\frac{\varepsilon}{2}$, supaya jumlah galat seluruh subselang yang diterima tidak melebihi toleransi total. Faktor 15 dan pembagian toleransi ini dipakai secara konservatif; dalam praktik banyak program memakai konstanta yang sedikit lebih ketat, misalnya 10 sebagai ganti 15, untuk berjaga-jaga.

Cara kerjanya bersifat rekursif dan dapat dipandang sebagai pohon pembelahan: akar adalah selang awal, daun adalah subselang yang lolos uji. Daerah mulus cepat menjadi daun, daerah rumit dibelah berkali-kali. Untuk mencegah rekursi tak berhingga, perlu ada batas kedalaman (atau batas tingkat), sebab pada fungsi yang tidak cukup mulus, taksiran selisih mungkin tidak pernah jatuh di bawah ambang. Bila batas tercapai, program sebaiknya melaporkan kegagalan alih-alih diam-diam mengembalikan jawaban yang tidak teruji.

Satu catatan penting tentang keandalan: taksiran galat di atas adalah heuristik, bukan batas yang dijamin. Ia mengandaikan $f^{(4)}$ kira-kira konstan dan bahwa pembelahan sudah cukup halus untuk "melihat" perilaku fungsi. Pada fungsi dengan singularitas turunan (misalnya $\sqrt{x}$ di dekat 0) atau pada selang awal yang terlalu lebar sehingga fitur penting terlewat di antara simpul, taksiran bisa meleset jauh; kedua contoh di bawah memperlihatkan hal ini. Karena itu, praktik yang baik ialah tidak memulai dari selang yang terlalu kasar dan menilai hasil dengan ketelitian yang wajar.

Dibanding rumus komposit, kuadratur adaptif jauh lebih efisien bagi integran yang bervariasi tajam di sebagian selang, dan sebagai bonus memberi taksiran galat. Kekurangannya adalah overhead rekursi serta evaluasi ulang titik tengah bila tidak dikelola (implementasi yang baik menyimpan nilai fungsi yang sudah dihitung). Seksi ini melanjutkan seksi 4.4 (Simpson komposit) dan memanfaatkan gagasan ekstrapolasi seperti pada seksi 4.2 dan 4.5; seksi 4.7 selanjutnya mengganti pemilihan simpul berjarak sama dengan simpul optimal.

Konsep kunci

Kuadratur adaptif — Metode integrasi numerik yang menentukan sendiri panjang subselang: subselang diperkecil hanya di tempat hampiran belum cukup teliti, sehingga galat tersebar merata.

Aturan Simpson pada satu selang — $S(a,b) = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)]$ dengan c titik tengah. Ini blok dasar yang dihitung pada selang penuh dan pada dua separuhnya.

Taksiran galat dari selisih — Selisih $S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)$ dipakai untuk memperkirakan galat tanpa menghitung $f^{(4)}$; galat sebenarnya kira-kira $\frac{1}{15}$ dari selisih itu.

Uji penerimaan 15ε — Subselang diterima bila $|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)| < 15\varepsilon$; jika tidak, ia dibelah dan toleransi tiap separuh menjadi $\frac{\varepsilon}{2}$.

Pembagian toleransi — Toleransi dibagi dua pada setiap pembelahan agar jumlah galat semua subselang akhir tetap tidak melebihi toleransi total.

Batas kedalaman rekursi — Pengaman agar proses berhenti pada fungsi yang sangat kasar atau singular; saat batas tercapai, hasil harus ditandai belum memenuhi toleransi.

Heuristik, bukan jaminan — Taksiran galat mengandaikan $f^{(4)}$ hampir konstan pada subselang, sehingga dapat keliru untuk selang awal terlalu kasar atau fungsi dengan singularitas.

Aturan Simpson pada selang $[a,b]$

$$S(a,b) = \tfrac{b-a}{6}\big[f(a) + 4f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) + f(b)\big]$$

Taksiran galat

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(a,c) - S(c,b) \right| \approx \tfrac{1}{15}|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)|, \quad c = \tfrac{a+b}{2}$$

Kriteria penerimaan

$$|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)| < 15\,\varepsilon$$

Hampiran terkoreksi (ekstrapolasi)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S(a,c) + S(c,b) + \tfrac{1}{15}[S(a,c) + S(c,b) - S(a,b)]$$

Algoritma: Kuadratur adaptif Simpson (rekursif)

1. Masukkan f, selang $[a,b]$, toleransi ε, dan batas kedalaman rekursi.
2. Hitung $c = \frac{a+b}{2}$, lalu $S(a,b)$, $S(a,c)$, dan $S(c,b)$ (simpan nilai fungsi di a, c, b dan titik tengah separuh agar tidak dihitung ulang).
3. Jika $|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)| < 15\varepsilon$, terima subselang ini dan kembalikan $S(a,c) + S(c,b)$ (atau versi terkoreksi dengan tambahan $\frac{1}{15}[S(a,c) + S(c,b) - S(a,b)]$).
4. Jika tidak dan kedalaman belum habis, panggil prosedur yang sama pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ masing-masing dengan toleransi $\frac{\varepsilon}{2}$, lalu jumlahkan hasilnya.
5. Jika kedalaman habis, laporkan bahwa toleransi tidak tercapai pada subselang tersebut.

Contoh 1: Satu langkah adaptif untuk $\int_0^2 e^{-x}\sin 3x\,dx$

Hitung $\int_0^2 e^{-x}\sin 3x\,dx$ dengan galat di bawah 10^{-4} memakai kuadratur adaptif Simpson. Nilai eksak (dari integrasi parsial) adalah $0{,}264798$.

Penyelesaian.

Misalkan $g(x) = e^{-x}\sin 3x$. Nilai yang dibutuhkan: $g(0) = 0$, $g(0{,}5) = 0{,}6050$, $g(1) = 0{,}0519$, $g(1{,}5) = -0{,}2181$, $g(2) = -0{,}0378$.

Langkah 1 pada $[0, 2]$:

$$S(0,2) = \tfrac{2}{6}[0 + 4(0{,}0519) - 0{,}0378] = 0{,}0566$$

$$S(0,1) = \tfrac{1}{6}[0 + 4(0{,}6050) + 0{,}0519] = 0{,}4120, \qquad S(1,2) = \tfrac{1}{6}[0{,}0519 + 4(-0{,}2181) - 0{,}0378] = -0{,}1431$$

Selisihnya $|0{,}0566 - 0{,}4120 + 0{,}1431| = 0{,}2123$, jauh di atas $15\varepsilon = 0{,}0015$, sehingga selang dibelah. (Perhatikan bahwa taksiran $\frac{0{,}2123}{15} = 0{,}0142$ pun meleset dari galat sebenarnya $S(0,1) + S(1,2) - 0{,}2648 = 0{,}0041$: selang awal terlalu lebar untuk taksiran yang dapat dipercaya.)

Proses dilanjutkan secara rekursif (dihitung dengan program). Subselang akhir yang diterima: $[0; 0{,}25]$, $[0{,}25; 0{,}5]$, $[0{,}5; 1]$, $[1; 1{,}5]$, $[1{,}5; 2]$, yaitu lima subselang dengan panjang berbeda. Hasil dengan koreksi $\frac{1}{15}$: $0{,}2647997$, galat sebenarnya sekitar $1{,}7 \times 10^{-6}$, jauh di bawah 10^{-4}. Terlihat bahwa subselang diperkecil di dekat $x = 0$ tempat fungsi berosilasi dan naik cepat.

Contoh 2: Peringatan: singularitas pada $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

Terapkan uji adaptif Simpson pada $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ dengan $\varepsilon = 10^{-3}$ dan bandingkan dengan nilai eksak $\frac{2}{3}$.

Penyelesaian.

Pada $[0, 1]$: $S(0,1) = 0{,}6381$, $S(0,0{,}5) = 0{,}2256$, $S(0{,}5,1) = 0{,}4309$, selisih $= 0{,}0185$. Karena $15\varepsilon = 0{,}015$, selang dibelah.

Pada $[0; 0{,}5]$ dengan toleransi $0{,}0005$ (ambang $0{,}0075$): selisih $= 0{,}006525 < 0{,}0075$, diterima. Pada $[0{,}5; 1]$ selisih $= 0{,}0000282$, diterima.

Hasil terkoreksi $0{,}6635$, sedangkan nilai eksak $0{,}6667$, galat $0{,}0031$, lebih dari tiga kali toleransi 10^{-3}. Penyebabnya: $f^{(4)}(x)$ untuk $f = \sqrt{x}$ tak terbatas di $x = 0$, sehingga anggapan "$f^{(4)}$ hampir konstan" gagal di subselang $[0; 0{,}5]$ dan taksiran galat terlalu optimis. Pelajaran: uji adaptif ini bukan jaminan; pada fungsi dengan singularitas, selang perlu dipecah secara manual di titik singular atau dipakai transformasi peubah (lihat seksi 4.9).

Kesalahan umum

• Menganggap taksiran $\frac{1}{15}|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)|$ sebagai batas galat yang dijamin. Ia heuristik yang berlaku bila $f^{(4)}$ kira-kira konstan; pada singularitas atau selang awal yang terlalu lebar, ia bisa meleset (lihat contoh $\sqrt{x}$).

• Lupa membagi dua toleransi pada setiap pembelahan, atau memakai toleransi total yang sama pada tiap subselang. Akibatnya jumlah galat seluruh subselang bisa melebihi toleransi yang diminta.

• Memulai dari selang yang sangat lebar untuk fungsi berosilasi, sehingga tiga titik Simpson 'melewatkan' fitur penting dan uji selisih keliru lolos dengan selisih kecil.

• Tidak memasang batas kedalaman rekursi. Pada fungsi tak mulus, rekursi bisa berlangsung sangat dalam atau tak berhenti, dan hasil yang dikembalikan tanpa peringatan tidak bisa dipercaya.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa membagi dua selang memperkecil galat Simpson per separuh sebesar faktor 32, tetapi jumlah galat dua separuh hanya mengecil sebesar faktor 16? Dari sini, bagaimana faktor 15 muncul?
2. Dalam kondisi apa kuadratur adaptif jauh lebih hemat daripada Simpson komposit berlangkah seragam, dan kapan keuntungannya hilang?
3. Mengapa toleransi dibagi dua pada tiap pembelahan? Apa yang terjadi pada galat total bila hal itu tidak dilakukan?
4. Bagaimana Anda dapat mendeteksi bahwa hasil adaptif tidak dapat dipercaya (misalnya karena singularitas) tanpa mengetahui nilai eksak?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $S(0,2)$ dan $S(0,1) + S(1,2)$ untuk $f(x) = x^3 + x$. Apa yang dapat Anda simpulkan tentang taksiran galatnya?

Kunci: Aturan Simpson eksak untuk polinom derajat ≤ 3, sehingga kedua hampiran sama dengan nilai eksak $\int_0^2 (x^3 + x)\,dx = 4 + 2 = 6$. Selisihnya 0, taksiran galat 0 dan sesuai dengan galat sebenarnya yang nol; subselang diterima langsung.

2. Untuk $f(x) = e^x$ pada $[0,1]$ hitung $S(0,1)$, $S(0,0{,}5) + S(0{,}5,1)$, taksiran galat $\frac{1}{15}|\cdot|$, dan bandingkan dengan galat sebenarnya.

Kunci: $S(0,1) = 1{,}71886$ dan $S(0,0{,}5) + S(0{,}5,1) = 1{,}71832$. Selisih $= 5{,}42 \times 10^{-4}$, taksiran galat $= \frac{5{,}42 \times 10^{-4}}{15} = 3{,}62 \times 10^{-5}$. Galat sebenarnya $|1{,}71828 - 1{,}71832| = 3{,}70 \times 10^{-5}$, sangat sesuai dengan taksiran.

3. Pada suatu subselang dengan toleransi $\varepsilon = 0{,}001$, selisih $|S(a,b) - S(a,c) - S(c,b)|$ bernilai $0{,}03$. Apa keputusan algoritma, dan berapa ambang yang dipakai pada tiap separuh berikutnya?

Kunci: Ambang $15\varepsilon = 0{,}015 < 0{,}03$, jadi subselang ditolak dan dibelah. Tiap separuh memakai toleransi $\frac{\varepsilon}{2} = 0{,}0005$, sehingga ambangnya menjadi $15 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0075$.

4.7 Gaussian Quadrature

Rujukan buku: halaman 228

Rumus Newton-Cotes memakai simpul berjarak sama dan bobot yang ditentukan oleh interpolasi. Dengan $n+1$ simpul, rumus itu eksak untuk polinom derajat paling tinggi n (atau $n+1$ bila n genap, seperti pada Simpson). Kuadratur Gauss mengajukan pertanyaan lebih berani: bila simpul $x_1, \ldots, x_n$ boleh dipilih bebas, bukan hanya bobotnya, derajat ketepatan setinggi apa yang dapat dicapai? Ada $2n$ parameter bebas (n simpul dan n bobot), sehingga masuk akal berharap rumus yang eksak untuk polinom derajat sampai $2n-1$, yaitu $2n$ koefisien. Harapan itu terpenuhi.

Bentuk rumusnya adalah

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\, f(x_i)$$

dengan simpul x_i ternyata merupakan akar polinom Legendre $P_n(x)$ pada $[-1,1]$, dan bobot $c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$. Mengapa akar Legendre? Polinom Legendre berderajat n ortogonal terhadap semua polinom berderajat lebih rendah pada $[-1,1]$. Misalkan P polinom berderajat $\leq 2n-1$. Bagilah P dengan P_n: $P = Q\,P_n + R$ dengan Q dan R berderajat $\leq n-1$. Maka $\int P = \int Q P_n + \int R = \int R$ karena ortogonalitas. Di simpul-simpul (akar P_n) berlaku $P(x_i) = R(x_i)$, dan rumus interpolasi dengan n simpul eksak untuk R. Jadi rumus itu eksak untuk P. Inilah inti teorema: simpul adalah akar P_n, bobot dari interpolasi Lagrange, dan hasilnya eksak untuk semua polinom berderajat $\leq 2n-1$. Semua bobot positif dan simpul terletak di dalam $(-1,1)$, yang membuat metode stabil terhadap galat pembulatan.

Nilai yang paling sering dipakai: untuk $n=2$, simpul $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ dengan bobot 1 dan 1; untuk $n=3$, simpul 0 dan $\pm\sqrt{0{,}6}$ dengan bobot $\frac{8}{9}$ dan $\frac{5}{9}$. Untuk selang umum $[a,b]$ dipakai perubahan peubah linear

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}, \qquad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\Big(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\Big)\,dt$$

sehingga hampirannya menjadi $\frac{b-a}{2} \sum_{i} c_i f(x_i)$ dengan x_i hasil pemetaan simpul baku. Simpul dan bobot untuk beberapa n biasanya diambil dari tabel (atau dihitung sekali dengan program).

Untuk fungsi yang cukup mulus, galatnya berbentuk konstanta dikali turunan ke-$2n$: ada ξ dengan galat $= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int \prod (x - x_i)^2 dx$ pada $[-1,1]$ (hingga pemetaan). Jadi cukup mulus berarti turunan tingkat tinggi tidak membesar. Pada contoh dengan $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ di bawah, rumus Gauss tiga titik jauh lebih teliti daripada Simpson yang juga memakai tiga evaluasi fungsi.

Kelebihan: ketelitian sangat tinggi per evaluasi fungsi, cocok bila evaluasi mahal dan integran mulus. Kekurangan: simpul tidak berjarak sama dan tidak bersarang, sehingga menaikkan n tidak dapat memakai ulang nilai fungsi sebelumnya (berbeda dengan Romberg, seksi 4.5); jika data berupa nilai di titik berjarak sama dari tabel, Gauss tidak dapat dipakai langsung. Gauss juga kurang baik untuk integran tak mulus, di mana kuadratur adaptif (seksi 4.6) lebih sesuai. Gagasan ini diperluas pada seksi 4.8 untuk integral ganda, dan pada keluarga polinom ortogonal lain (Laguerre, Hermite, Chebyshev) yang dipakai untuk bobot tertentu atau selang tak hingga.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Derajat ketepatan — Derajat polinom tertinggi yang diintegrasikan eksak oleh suatu rumus. Gauss dengan n simpul mencapai $2n-1$, sedangkan rumus interpolatoris biasa hanya $n-1$ (atau sedikit lebih).

Polinom Legendre — Keluarga polinom P_n yang ortogonal pada $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1} P_n(x)q(x)\,dx = 0$ untuk setiap polinom q berderajat $< n$. Akarnya menjadi simpul Gauss.

Simpul Gauss — Akar P_n; semuanya riil, berbeda, dan terletak di dalam $(-1,1)$, simetris terhadap titik nol.

Bobot Gauss — $c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx$; selalu positif dan berjumlah 2 (panjang selang $[-1,1]$).

Transformasi selang — Untuk $[a,b]$ dipakai $x = \frac{(b-a)t+(a+b)}{2}$ sehingga integral menjadi $\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}(\cdots)dt$.

Ortogonalitas sebagai kunci bukti — Bila $\deg P \le 2n-1$, pembagian oleh P_n menyisakan hasil bagi dan sisa berderajat $\le n-1$; bagian hasil bagi menghilang lewat ortogonalitas.

Keterbatasan — Simpul tidak bersarang dan tidak berjarak sama; menambah n berarti menghitung ulang semua nilai fungsi, dan integran tak mulus mengurangi keunggulannya.

Kuadratur Gauss pada $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\, f(x_i), \qquad P_n(x_i) = 0$$

Gauss dua titik

$$x_{1,2} = \mp\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad c_1 = c_2 = 1$$

Gauss tiga titik

$$x = -\sqrt{0{,}6},\ 0,\ \sqrt{0{,}6}; \qquad c = \tfrac{5}{9},\ \tfrac{8}{9},\ \tfrac{5}{9}$$

Transformasi ke selang $[a,b]$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \tfrac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\Big(\tfrac{(b-a)t+a+b}{2}\Big)dt$$

Derajat ketepatan

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i) \quad \text{untuk semua polinom } \deg P \le 2n-1$$

Algoritma: Menghitung integral dengan kuadratur Gauss-Legendre

1. Pilih n dan ambil simpul baku t_i serta bobot c_i untuk n tersebut dari tabel.

2. Petakan simpul ke selang $[a,b]$: $x_i = \frac{(b-a)t_i + (a+b)}{2}$.
3. Hitung $f(x_i)$ untuk $i = 1, \ldots, n$.
4. Jumlahkan: $I \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$.
5. Untuk menilai ketelitian, ulangi dengan $n+1$ (atau bagi selang menjadi beberapa bagian dan terapkan rumus pada tiap bagian) lalu bandingkan hasilnya.

Contoh 1: Gauss dua dan tiga titik untuk $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

Hampiri $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ dengan Gauss $n=2$ dan $n=3$. Nilai referensi: $0{,}746824$.

Penyelesaian.

Peta simpul: $x = \frac{t+1}{2}$ dan faktor $\frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$.

$n=2$: $t = \mp 0{,}57735$ memberi $x = 0{,}21132$ dan $0{,}78868$, bobot 1. Maka

$$I \approx \tfrac{1}{2}\left[e^{-0{,}21132^2} + e^{-0{,}78868^2}\right] = 0{,}746595$$

dengan galat sekitar $2{,}3 \times 10^{-4}$.

$n=3$: $t = -0{,}774597;\ 0;\ 0{,}774597$ memberi $x = 0{,}112702;\ 0{,}5;\ 0{,}887298$, bobot $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$. Maka

$$I \approx \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{5}{9}e^{-0{,}112702^2} + \tfrac{8}{9}e^{-0{,}25} + \tfrac{5}{9}e^{-0{,}887298^2}\right] = 0{,}746815$$

dengan galat sekitar $9{,}5 \times 10^{-6}$. Sebagai pembanding, Simpson dengan tiga evaluasi (pada 0, $0{,}5$, 1) memberi $0{,}747180$, galat sekitar $3{,}6 \times 10^{-4}$. Dengan jumlah evaluasi sama, Gauss sekitar 40 kali lebih teliti.

Contoh 2: Gauss dua titik untuk $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ pada selang umum

Hampiri $\ln 3 = \int_1^3 \frac{dx}{x}$ dengan Gauss $n=2$.

Penyelesaian.

Di sini $a=1$, $b=3$, sehingga $x = \frac{2t+4}{2} = t+2$ dan faktor $\frac{b-a}{2} = 1$. Simpul: $x_1 = 2 - 0{,}57735 = 1{,}42265$, $x_2 = 2 + 0{,}57735 = 2{,}57735$.

$$I \approx \frac{1}{1{,}42265} + \frac{1}{2{,}57735} = 0{,}70291 + 0{,}38800 = 1{,}0909$$

Nilai eksak $\ln 3 = 1{,}0986$, galat $0{,}0077$. Galatnya cukup besar karena $f(x) = \frac{1}{x}$ memiliki turunan tinggi yang besar di dekat $x=1$ dan selang yang lebar; membagi selang atau menaikkan n akan memperbaikinya.

Contoh 3: Memeriksa derajat ketepatan $n=2$

Buktikan numerik bahwa Gauss dua titik eksak untuk $\int_{-1}^{1}(t^3+2t^2+1)\,dt$.

Penyelesaian.

Nilai eksak: suku t^3 ganjil sehingga integralnya 0; $\int_{-1}^{1}2t^2dt=\frac{4}{3}$; $\int_{-1}^{1}1\,dt=2$. Jumlah $=\frac{10}{3}$.

Gauss dua titik: untuk $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ suku t^3 saling meniadakan ($\mp\frac{1}{3\sqrt{3}}$), $2t^2=\frac{2}{3}$ di tiap simpul sehingga totalnya $\frac{4}{3}$, dan suku 1 menyumbang $1+1=2$. Hasil $0+\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$, sama dengan nilai eksak. Hal serupa tidak berlaku untuk derajat 4: $\int_{-1}^{1}t^4dt=\frac{2}{5}$ tetapi Gauss dua titik memberi $2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$.

Kesalahan umum

• Lupa mengalikan hasil dengan faktor $\frac{b-a}{2}$ setelah memetakan selang $[a,b]$ ke $[-1,1]$, sehingga hasil salah dengan faktor skala.

• Mengira Gauss n titik hanya eksak sampai derajat n atau $n-1$. Yang benar, eksak sampai derajat $2n-1$; namun untuk derajat $2n$ tidak lagi eksak (galat melibatkan $f^{(2n)}$).

• Memakai simpul dan bobot untuk $[-1,1]$ langsung pada selang lain tanpa transformasi, atau memetakan simpul tetapi lupa memetakan peubah pada f.

• Menaikkan n sambil berharap dapat memakai ulang nilai f sebelumnya (seperti pada Romberg). Simpul Gauss untuk n berbeda tidak bersarang, sehingga semua evaluasi harus dihitung ulang.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa menghitung simpul sebagai akar polinom ortogonal menghasilkan ketepatan derajat $2n-1$? Jelaskan peran pembagian polinom dan ortogonalitas.
2. Mengapa semua bobot Gauss positif, dan mengapa sifat ini penting bagi stabilitas numerik dibandingkan rumus Newton-Cotes orde tinggi?
3. Kapan Anda memilih Gauss, kapan Simpson komposit, dan kapan kuadratur adaptif? Pertimbangkan kemulusan integran dan cara data diperoleh.
4. Jika integran memiliki singularitas di salah satu ujung selang, apa yang terjadi pada ketelitian Gauss, dan perlakuan apa yang masuk akal?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $\int_{-1}^{1}(5t^3-t^2+3)\,dt$ eksak dan dengan Gauss dua titik.

Kunci: Eksak: $0-\frac{2}{3}+6=\frac{16}{3}$. Gauss dua titik: suku t^3 saling meniadakan, $-t^2$ memberi $-\frac{1}{3}$ di tiap simpul sehingga $-\frac{2}{3}$, dan 3 memberi $3+3=6$; jumlah $\frac{16}{3}$. Sama, karena derajat $3\le 2\cdot 2-1$.

2. Hitung $\int_{0}^{2}x^5\,dx$ dengan Gauss tiga titik dan jelaskan mengapa hasilnya eksak.

Kunci: Eksak: $\frac{2^6}{6}=\frac{32}{3}\approx 10{,}6667$. Pemetaan $x=t+1$ dengan faktor 1, simpul $x=1-0{,}774597;\,1;\,1+0{,}774597$ dan bobot $\frac{5}{9},\frac{8}{9},\frac{5}{9}$ menghasilkan nilai yang sama dengan $\frac{32}{3}$ karena derajat $5\le 2\cdot 3-1$, jadi rumus eksak.

3. Tentukan simpul dan bobot Gauss dua titik untuk $\int_{2}^{6}\frac{dx}{x}$ dan hitung hampirannya.

Kunci: $x = \frac{4t+8}{2} = 2t + 4$, faktor $\frac{b-a}{2} = 2$. Simpul $x = 4 \mp \frac{2}{\sqrt{3}} = 2{,}8453;\ 5{,}1547$. Hampiran $= 2\left[\frac{1}{2{,}8453} + \frac{1}{5{,}1547}\right] = 2(0{,}35146 + 0{,}19400) = 1{,}0909$. Nilai eksak $\ln 3 = 1{,}0986$ (sama dengan contoh 2 karena skala selang $\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$).

4. Berapa derajat polinom tertinggi yang dijamin dihitung eksak oleh Gauss empat titik? Berapa banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan Newton-Cotes untuk derajat yang sama?

Kunci: Gauss empat titik eksak sampai derajat $2 \cdot 4 - 1 = 7$. Rumus interpolatoris berjarak sama (misalnya Newton-Cotes tertutup) dengan derajat 7 memerlukan 8 simpul (rumus untuk $n = 7$ eksak sampai derajat 7 bila n ganjil), yaitu dua kali lebih banyak evaluasi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

4.8 Multiple Integrals

Rujukan buku: halaman 235

Teknik kuadratur satu peubah dapat diperluas ke integral ganda. Untuk daerah persegi panjang $R = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, integral ganda dihitung sebagai integral berulang:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Ide praktisnya: terapkan satu aturan kuadratur pada peubah y untuk setiap nilai x tertentu, lalu terapkan aturan lain pada hasilnya terhadap x. Bila memakai Simpson komposit dengan n subselang (genap) pada x dan m subselang (genap) pada y, langkahnya $h = \frac{b-a}{n}$ dan $k = \frac{d-c}{m}$, dan hasilnya adalah jumlah berbobot nilai f di simpul-simpul kisi (x_i, y_j) dengan bobot berupa hasil kali bobot Simpson satu dimensi, yaitu pola $1, 4, 2, 4, \ldots, 4, 1$ pada tiap arah dikalikan dengan $\frac{hk}{9}$:

$$\iint_R f\,dA \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w_i\, w_j\, f(x_i, y_j)$$

dengan w_i bobot Simpson (1,4,2,...,4,1). Galatnya berorde $O(h^4 + k^4)$ asalkan f cukup mulus, dengan konstanta yang melibatkan turunan keempat terhadap x dan y. Cara yang sama berlaku untuk trapesium atau aturan lain.

Kuadratur Gauss juga dapat dipakai. Dengan memetakan persegi panjang ke $[-1,1] \times [-1,1]$ kita memperoleh rumus hasil kali: $\sum_i \sum_j c_i c_j f(x_i, y_j)$ dengan faktor skala $\frac{(b-a)(d-c)}{4}$. Rumus ini eksak untuk semua polinom yang pada tiap peubah berderajat $\le 2n-1$. Jumlah evaluasi hanya n^2 untuk n simpul per arah, jauh lebih sedikit daripada Simpson komposit untuk ketelitian sebanding.

Daerah yang lebih umum, yaitu $a \le x \le b$ dan $c(x) \le y \le d(x)$, ditangani dengan memperbolehkan batas dalam bergantung pada x. Untuk setiap simpul x_i arah luar, selang dalam $[c(x_i), d(x_i)]$ dipetakan sendiri ke $[-1,1]$ atau ke simpul Simpson, sehingga simpul dalamnya berbeda untuk tiap x_i dan kisinya tidak lagi berbentuk persegi panjang. Jumlah rangkap dua yang diperoleh memuat faktor panjang selang dalam $\frac{d(x_i) - c(x_i)}{2}$. Penting: setelah integral dalam dihitung, hasilnya menjadi fungsi dari x saja yang harus cukup mulus. Bila $c(x)$ atau $d(x)$ tidak mulus, ketelitian aturan luar menurun walaupun aturan dalam eksak.

Secara umum, galat dari integral ganda numerik adalah kombinasi galat aturan dalam dan galat aturan luar. Contoh kedua di bawah menunjukkan situasi tipikal: aturan dalam eksak (polinom derajat $2 \le 3$ pada y), tetapi fungsi hasil dalam berderajat 4 pada x, di luar jangkauan Gauss dua titik, sehingga galat tersisa. Memilih orde yang cukup pada setiap arah adalah bagian dari perancangan.

Kelemahan utama integral ganda numerik adalah ledakan jumlah evaluasi: untuk d dimensi dengan n simpul per arah dibutuhkan n^d evaluasi, sehingga cara hasil kali praktis hanya untuk dimensi rendah (2 atau 3). Untuk dimensi lebih tinggi dipakai metode Monte Carlo, yang galatnya tidak bergantung pada dimensi tetapi konvergen lambat. Seksi ini menggabungkan Simpson komposit (seksi 4.4) dan kuadratur Gauss (seksi 4.7), dan mempersiapkan integral tak wajar pada seksi 4.9.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Integral berulang — $\iint_R f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ untuk f kontinu pada persegi panjang R; dasar untuk menerapkan kuadratur satu dimensi dua kali.

Simpson ganda — Jumlah berbobot nilai f pada kisi (x_i, y_j) dengan bobot hasil kali bobot Simpson dan faktor $\frac{hk}{9}$; n dan m keduanya genap.

Kuadratur Gauss hasil kali — $\sum_i \sum_j c_i c_j f(x_i, y_j)$ dengan faktor skala $\frac{(b-a)(d-c)}{4}$, memakai hanya n^2 evaluasi dan eksak bagi polinom berderajat $\leq 2n-1$ pada tiap peubah.

Daerah dengan batas peubah — Untuk $c(x) \leq y \leq d(x)$, selang dalam berubah mengikuti x; simpul arah dalam dihitung ulang untuk setiap simpul arah luar dengan faktor $\frac{d(x)-c(x)}{2}$.

Keluarga galat — Galat total berasal dari aturan dalam dan aturan luar. Eksak di satu arah tidak menjamin hasil eksak jika arah lain tidak eksak.

Ledakan dimensi — Biaya n^d untuk d dimensi membuat aturan hasil kali hanya cocok untuk dimensi rendah; untuk dimensi tinggi dipakai Monte Carlo.

Integral berulang pada persegi panjang

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Simpson ganda

$$\iint_R f\,dA \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w_i\, w_j\, f(x_i, y_j), \quad h = \frac{b-a}{n},\ k = \frac{d-c}{m}$$

Gauss ganda pada persegi panjang

$$\iint_R f\,dA \approx \frac{(b-a)(d-c)}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i\, c_j\, f\Big(\frac{(b-a)t_i + a + b}{2}, \frac{(d-c)t_j + c + d}{2}\Big)$$

Daerah dengan batas peubah

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_i c_i \frac{d(x_i)-c(x_i)}{2} \sum_j c_j\, f(x_i, y_{ij})$$

Algoritma: Integral ganda dengan kuadratur Gauss pada daerah $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$

1. Pilih n simpul Gauss t_i dan bobot c_i (arah luar) serta m simpul u_j dengan bobot c_j (arah dalam).
2. Untuk setiap i: hitung $x_i = \frac{(b-a)t_i + a + b}{2}$, $\alpha_i = c(x_i)$, $\beta_i = d(x_i)$.
3. Untuk setiap j: hitung $y_{ij} = \frac{(\beta_i - \alpha_i)u_j + \alpha_i + \beta_i}{2}$ dan jumlah dalam $J_i = \frac{\beta_i - \alpha_i}{2} \sum_j c_j f(x_i, y_{ij})$.
4. Jumlah luar: $I \approx \frac{b-a}{2} \sum_i c_i J_i$.
5. Bandingkan dengan hasil untuk n, m lebih besar untuk menilai ketelitian.

Contoh 1: Persegi panjang: Simpson ganda dan Gauss untuk $\int_0^1 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{x+y}$

Hampiri $\int_{1}^{2}\int_{1}^{1} \frac{1}{x+y}\,dy\,dx$ dengan Simpson ganda $n=m=2$ dan dengan Gauss dua titik per arah. Nilai eksak: $3\ln 3 - 4\ln 2 = 0{,}523248$.

Penyelesaian.

Simpson ganda dengan $n=m=2$ ($h=k=0{,}5$): nilai f di kisi $x\in\{0;\,0{,}5;\,1\}$, $y\in\{1;\,1{,}5;\,2\}$ adalah baris demi baris $(1;\,0{,}6667;\,0{,}5)$, $(0{,}6667;\,0{,}5;\,0{,}4)$, $(0{,}5;\,0{,}4;\,0{,}3333)$.

Jumlah berbobot: sudut (bobot 1) $1+0{,}5+0{,}5+0{,}3333 = 2{,}3333$; sisi (bobot 4) $4(0{,}6667+0{,}5+0{,}6667+0{,}4) = 8{,}5333$ (nilai sisi $0{,}6667;\,0{,}6667;\,0{,}4;\,0{,}4$ hingga pembulatan); pusat (bobot 16) $16(0{,}5) = 8$. Total $18{,}8667$, dikali $\frac{hk}{9} = \frac{0{,}25}{9}$ memberi $0{,}524074$, galat $8{,}3\times10^{-4}$ dengan 9 evaluasi. Dengan $n=m=4$ hasilnya $0{,}523310$ (galat $6{,}3\times10^{-5}$, 25 evaluasi).

Gauss dua titik: $x=\frac{t+1}{2}$, $y=\frac{u+3}{2}$, $t,u=\pm0{,}57735$, faktor $\frac{1\cdot1}{4}$, semua bobot 1:

$$I \approx \tfrac{1}{4}\sum_{t,\,u}\frac{1}{x+y} = 0{,}522727$$

galat $5{,}2\times10^{-4}$ hanya dengan 4 evaluasi.

Contoh 2: Daerah dengan batas peubah: $\int_{0}^{1}\int_{x}^{2x}(xy^2+y)\,dy\,dx$

Hampiri integral ini dengan Gauss dua titik pada kedua arah dan bandingkan dengan nilai eksak.

Penyelesaian.

Nilai eksak: integral dalam $= \frac{x(8x^3-x^3)}{3} + \frac{4x^2-x^2}{2} = \frac{7}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^2$, lalu $\int_0 = \frac{7}{15}+\frac{1}{2} = 0{,}96667$.

Gauss dua titik: simpul luar $x_i = \frac{1\mp0{,}57735}{2} = 0{,}21132;\ 0{,}78868$. Untuk tiap x_i, batas dalam $c=x_i$, $d=2x_i$, faktor dalam $\frac{x_i}{2}$, simpul dalam $y=\frac{3x_i\mp0{,}57735\,x_i}{2}$. Hasil perhitungan: $0{,}95370$.

Galat $0{,}0130$. Penjelasan: integran dalam xy^2+y berderajat 2 pada y, sehingga integral dalam eksak (Gauss dua titik eksak sampai derajat 3). Tetapi hasil integral dalam adalah $\frac{7}{3}x^4+\frac{3}{2}x^2$, berderajat 4 pada x, melampaui derajat ketepatan 3 aturan luar, sehingga muncul galat. Memakai tiga titik pada arah luar membuat hasil eksak.

Kesalahan umum

• Memakai bobot $1, 4, 2, 4, \ldots$ hanya sebagian (misalnya lupa mengalikan bobot arah x dan arah y), atau lupa faktor $\frac{hk}{9}$. Bobot sudut harus 1, sisi 4 atau 2 menurut paritas, pusat 16 untuk $n = m = 2$.

• Memilih n atau m ganjil pada Simpson ganda; Simpson memerlukan banyak subselang genap pada setiap arah.

• Pada daerah dengan batas peubah, memakai simpul dalam yang sama untuk semua x_i. Batas $c(x_i)$ dan $d(x_i)$ berbeda sehingga simpul dalam dan faktor $\frac{d-c}{2}$ harus dihitung per x_i.

• Mengira hasil eksak di satu arah cukup untuk hasil total eksak. Fungsi hasil integral dalam dapat berderajat lebih tinggi pada peubah luar sehingga aturan luar perlu orde yang cukup.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa aturan hasil kali Gauss $n \times n$ eksak untuk polinom yang berderajat $\leq 2n-1$ pada tiap peubah, dan apa artinya untuk polinom seperti x^3y^3 dan x^4?
2. Bagaimana biaya n^d memengaruhi pilihan metode untuk integral berdimensi tinggi? Apa harga yang dibayar saat beralih ke Monte Carlo?
3. Dalam integral dengan batas $c(x), d(x)$, bagaimana ketidakmulusan batas (misalnya $|x|$) menurunkan ketelitian, dan apa cara mengatasinya?
4. Kapan Anda memilih Simpson ganda dibanding Gauss ganda untuk integral berulang pada persegi panjang?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $\int_0^1 \int_0^2 x^2 y \, dy \, dx$ dengan Simpson ganda $n = m = 2$ dan bandingkan dengan nilai eksak.

Kunci: Eksak: $\int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^2 y \, dy = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$. Simpson eksak untuk polinom derajat ≤ 3 pada tiap peubah, dan x^2y berderajat 2 dan 1, sehingga hasilnya juga $\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$ tanpa galat.

2. Berapa evaluasi fungsi yang dibutuhkan Simpson ganda dengan $n = m = 4$, dan Gauss tiga titik per arah? Peubah mana yang menaik cepat saat dimensi bertambah?

Kunci: Simpson ganda $n = m = 4$: $(4+1)(4+1) = 25$ evaluasi. Gauss 3×3: 9 evaluasi. Untuk d dimensi biayanya n^d (Gauss) atau $(n+1)^d$ (Simpson), tumbuh eksponensial terhadap dimensi.

3. Hitung $\int_0^1 \int_0^1 e^y \, dy \, dx$ eksak dan dengan Gauss dua titik (arah luar dan dalam).

Kunci: Eksak: $\int_0^1 (e^x - 1) \, dx = e - 2 = 0{,}71828$. Gauss dua titik memberi $0{,}71784$ (galat sekitar $4{,}4 \times 10^{-4}$), karena e^y bukan polinom sehingga aturan dalam tidak eksak.

4.9 Improper Integrals

Rujukan buku: halaman 250

Integral tak wajar adalah integral yang kriteria dasarnya dilanggar: integran tak terbatas di salah satu ujung selang (atau di dalam selang), atau selang integrasinya tak berhingga. Aturan Simpson, trapesium, dan Gauss mengandaikan integran terbatas dan cukup mulus pada selang berhingga; pada integral tak wajar, rumus-rumus itu tidak dapat dipakai begitu saja. Bahkan jika ujung singular dihindari (misalnya dengan menggeser sedikit), galat tetap besar karena turunan integran tidak terbatas. Strategi umumnya adalah mengubah integral tak wajar menjadi integral wajar yang mulus atau memisahkan bagian singular dan menanganinya secara analitik.

Kasus pertama: singularitas di ujung kiri berbentuk $f(x) = \frac{g(x)}{x^p}$ dengan $0 < p < 1$ dan g mulus. Integral konvergen. Dua cara baku. Cara pertama memperluas g dalam deret Taylor di sekitar titik singular dan mengintegrasikan suku demi suku secara analitik pada bagian dekat singularitas, lalu menghitung sisa numerik. Cara kedua memakai substitusi peubah yang melenyapkan singularitas. Dengan $x = t^q$ dan $q = \frac{1}{1-p}$ diperoleh $dx = q\,t^{q-1}dt$ dan $x^{-p} = t^{-pq}$ sehingga faktor $t^{q-1-pq} = t^0 = 1$ bila $q - 1 = pq$, yaitu $q(1-p) = 1$. Jadi $\int_0 \frac{g(x)}{x^p}dx = q\int_0 g(t^q)\,dt$ dan integran baru mulus. Contoh: untuk $p = \frac{1}{2}$ pakai $x = t^2$, dan untuk $p = \frac{1}{3}$ pakai $x = t^{3/2}$ (agar $q = \frac{3}{2}$).

Kasus kedua: selang tak berhingga, misalnya $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dengan $a > 0$. Substitusi $t = \frac{1}{x}$ memberi

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{1/a} \tfrac{1}{t^2}\,f\!\left(\tfrac{1}{t}\right)dt$$

Integran baru mungkin singular di $t = 0$ (karena faktor t^{-2}), tetapi pada integral yang konvergen kombinasi $t^{-2}f(1/t)$ sering terbatas atau hanya singular lemah, sehingga dapat ditangani lagi oleh cara kasus pertama. Contoh yang mulus sempurna dipakai di bawah. Bila f meluruh sangat cepat (misalnya eksponensial), alternatif sederhana adalah memotong selang pada titik b besar sehingga ekor $\int_b^\infty f$ dapat diabaikan, kemudian memakai kuadratur biasa pada $[a, b]$. Untuk selang tak berhingga di kedua sisi, pecah menjadi $\int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty}$.

Untuk integral tak wajar dengan singularitas di titik dalam selang, pecah di titik itu sehingga singularitas ada pada ujung subselang. Hal lain yang perlu diingat: integral harus konvergen terlebih dulu. Misalnya $\int_0 x^{-1}dx$ divergen dan tidak ada gunanya mencari hampiran numerik; metode numerik pada integral divergen justru menghasilkan angka yang tampak wajar namun tak bermakna. Karena itu pastikan konvergensi lewat analisis sederhana (perbandingan dengan x^{-p} untuk $p < 1$ pada ujung berhingga, atau x^{-p} untuk $p > 1$ pada tak hingga).

Dibanding teknik lain, substitusi adalah cara termurah dan sering paling akurat, karena integran baru dapat ditangani oleh Simpson atau Gauss biasa. Kelemahannya: tidak semua singularitas dapat dibuang dengan substitusi sederhana (misalnya singularitas logaritmik memerlukan penanganan khusus), dan substitusi dapat membuat integran baru berosilasi atau terlalu curam sehingga memerlukan kuadratur adaptif (seksi 4.6). Seksi ini melengkapi bab integrasi numerik dengan menangani kasus yang mengeluarkan hipotesis aturan-aturan sebelumnya.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Integral tak wajar — Integral dengan integran tak terbatas di ujung (atau di dalam) selang, atau dengan selang tak berhingga; bergantung pada kekonvergenannya, nilainya didefinisikan sebagai limit.

Singularitas ujung x^{-p} — Untuk $0<p<1$ pada selang berhingga, integral $\int_0^1 x^{-p} g(x)\,dx$ konvergen untuk g mulus; untuk $p \geq 1$ umumnya divergen.

Substitusi $x = t^q$ — Dengan $q = \frac{1}{1-p}$ faktor $x^{-p}dx$ menjadi $q\,dt$ sehingga integran baru $q\,g(t^q)$ mulus dan siap dikuadratur.

Substitusi $t = \frac{1}{x}$ — Mengubah $\int_a^\infty f(x)dx$ menjadi $\int_0^{1/a} t^{-2} f(\frac{1}{t})\,dt$ pada selang berhingga.

Pemotongan ekor — Untuk integran yang meluruh cepat, selang tak berhingga diganti selang $[a,b]$ dengan b cukup besar sehingga sisa $\int_b^\infty f$ dapat diabaikan.

Pemecahan selang — Singularitas di dalam selang atau selang dua sisi tak hingga dipecah agar singularitas berada di ujung subselang yang dapat ditangani.

Periksa konvergensi dahulu — Hampiran numerik pada integral divergen tidak bermakna; periksa dengan perbandingan terhadap x^{-p} sebelum menghitung.

Singularitas ujung: substitusi $x = t^q$

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x^p}\,dx = q\int_0^1 g(t^q)dt, \qquad q=\tfrac{1}{1-p},\ 0<p<1$$

Kasus $p = \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 g(t^2)dt$$

Selang tak hingga: $t = \frac{1}{x}$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^{1/a} \tfrac{1}{t^2} f\left(\tfrac{1}{t}\right)dt, \quad a>0$$

Konvergensi pembanding

$$\int_0^1 x^{-p}dx < \infty \Leftrightarrow p<1; \qquad \int_1^\infty x^{-p}dx < \infty \Leftrightarrow p>1$$

Algoritma: Menangani integral tak wajar secara numerik

1. Periksa jenis ketaktakwajaran (singularitas di mana, atau selang tak hingga) dan pastikan integral konvergen dengan perbandingan terhadap x^{-p}.
2. Bila singularitas di titik dalam selang, pecah selang di titik itu; bila selang dua sisi tak hingga, pecah di titik yang sesuai.
3. Untuk singularitas x^{-p} di ujung: lakukan substitusi $x = t^q$ dengan $q = \frac{1}{1-p}$; atau gunakan deret Taylor dan integrasi analitik di dekat singularitas.

4. Untuk selang tak hingga: pakai $t = \frac{1}{x}$ (dan tangani singularitas ringan yang tersisa), atau potong ekor pada b besar bila peluruhan cepat.
5. Terapkan kuadratur wajar (Simpson komposit atau Gauss) pada integran baru, lalu perbaiki ketelitian dengan menambah subselang.

Contoh 1: Singularitas ujung: $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

Hitung $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ dengan substitusi dan Simpson komposit $n = 4$.

Penyelesaian.

Di sini $p = \frac{1}{2}$, pakai $x = t^2$: $dx = 2t\, dt$ dan $\sqrt{x} = t$, sehingga

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^1 \cos(t^2)\, dt$$

Integran baru $2\cos t^2$ mulus pada $[0, 1]$. Dengan $h = 0{,}25$, nilai integran: $2{,}0000;\ 1{,}9961;\ 1{,}9378;\ 1{,}6918;\ 1{,}0806$.

$$S = \frac{0{,}25}{3}[2{,}0000 + 4(1{,}9961) + 2(1{,}9378) + 4(1{,}6918) + 1{,}0806] = 0{,}083333 \cdot 21{,}7081 = 1{,}80900$$

Nilai referensi (Simpson dengan 4000 subselang) $1{,}80905$, galat sekitar $4{,}6 \times 10^{-5}$. Tanpa substitusi, integran bernilai tak terhingga di $x = 0$.

Contoh 2: Selang tak hingga: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3 + x}$

Hampiri integral ini dengan substitusi $t = \frac{1}{x}$ dan Simpson $n = 4$. Nilai eksak $\frac{\ln 2}{2} = 0{,}346574$.

Penyelesaian.

Dengan $t = \frac{1}{x}$: $\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^{-3} + t^{-1}} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^3}{1 + t^2} = \frac{t}{1 + t^2}$. Integran baru mulus (bahkan nol di $t = 0$).

$$\int_0^1 \frac{t}{1 + t^2} dt \approx \frac{0{,}25}{3}[0 + 4(0{,}23529) + 2(0{,}4) + 4(0{,}48) + 0{,}5] = 0{,}34676$$

Galat $1{,}9 \times 10^{-4}$. (Eksak: $\frac{1}{2}\ln(1 + t^2)|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.)

Contoh 3: Singularitas dengan $p = \frac{1}{3}$**:** $\int_0^1 x^{-1/3} e^x dx$

Pilih substitusi yang membuat integran mulus, lalu hitung dengan Simpson $n = 4$.

Penyelesaian.

Untuk $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ sehingga $x = t^{3/2}$ cocok. Namun $x = t^3$ juga melenyapkan singularitas: $dx = 3t^2 dt$, $x^{-1/3} = \frac{1}{t}$, jadi integral menjadi $\int_0^1 3t\, e^{t^3} dt$ (integran mulus). Dengan Simpson $n = 4$ hasilnya $2{,}3604$, sedangkan nilai referensi $2{,}3436$ (Simpson 4000 subselang), galat $0{,}017$. Galat masih terlihat karena $n = 4$ kasar; menaikkan n memperbaikinya. Perhatikan: substitusi mana pun yang menghapus singularitas valid; pilihan q memengaruhi seberapa mulus integran baru.

Kesalahan umum

• Menerapkan Simpson langsung pada integran yang tak terbatas di ujung (misalnya mengisi $f(0)$ dengan nilai sembarang atau menggeser ujung sedikit), yang memberi hasil buruk.

• Mencari hampiran numerik tanpa memeriksa kekonvergenan. Integral divergen seperti $\int_0 \frac{dx}{x}$ dapat tampak menghasilkan angka, tetapi tak bermakna.

• Lupa faktor Jacobi saat mengganti peubah: pada $t = \frac{1}{x}$ lupa t^{-2}, atau pada $x = t^{q}$ lupa $q\,t^{q-1}$, sehingga hasil salah skala.

• Memotong selang tak hingga pada b yang terlalu kecil untuk integran yang meluruh lambat (misalnya $\frac{1}{x^{1,5}}$), sehingga sisa ekor tidak dapat diabaikan.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa singularitas x^{-p} dengan $0 < p < 1$ masih memberi integral konvergen tetapi membuat aturan Simpson biasa gagal? Hubungkan dengan perilaku turunan integran.
2. Bagaimana substitusi $x = t^{q}$ menyingkirkan singularitas? Mengapa $q = \frac{1}{1-p}$ merupakan pilihan alami?
3. Kapan memotong ekor lebih baik daripada substitusi $t = \frac{1}{x}$, dan bagaimana Anda menaksir sisa yang diabaikan?
4. Bagaimana Anda menangani integran yang singular di titik dalam selang atau berganda di kedua ujung?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Ubah $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ menjadi integral wajar dan hitung dengan Simpson $n = 2$. Bandingkan dengan nilai referensi $1{,}49365$.

Kunci: $x = t^2$ memberi $2\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$. Dengan $h = 0{,}5$: integran $2;\ 1{,}5576;\ 0{,}7358$. $S = \frac{0{,}5}{3}[2 + 4(1{,}5576) + 0{,}7358] = 1{,}4944$. Selisih dengan referensi $\approx 7{,}1 \times 10^{-4}$.

2. Hampiri $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x^4}$ dengan $t = \frac{1}{x}$ dan Simpson $n = 2$. Nilai eksak $1 - \frac{\pi}{4}$.

Kunci: $t^{-2} f(1/t) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^4}{t^2+1} = \frac{t^2}{1+t^2}$. Nilai pada $0; 0{,}5; 1$: $0;\ 0{,}2;\ 0{,}5$. $S = \frac{0{,}5}{3}[0 + 0{,}8 + 0{,}5] = 0{,}21667$. Eksak $1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}21460$, galat $2{,}1 \times 10^{-3}$.

3. Apakah $\int_0^1 x^{-3/2}\,dx$ konvergen? Jelaskan dan nyatakan apakah substitusi $x = t^{q}$ dengan $q = \frac{1}{1-p}$ dapat dipakai.

Kunci: Tidak konvergen karena $p = \frac{3}{2} > 1$ (integral $\int_0^1 x^{-p}dx$ konvergen hanya bila $p < 1$). Rumus $q = \frac{1}{1-p} = -2$ bernilai negatif dan tidak memberi pemetaan $[0,1] \to [0,1]$ yang berarti. Jadi tidak ada gunanya mencari hampiran numerik.

Pesan Utama

Ingat

Mengecilkan h tidak gratis: galat pembulatan pada turunan numerik justru membesar bila h terlalu kecil.

Steven Paulus Siahaan

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan