MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 5

Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Biasa

Initial-Value Problems for Ordinary Differential Equations

Halaman buku 259 – 355 • 12 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Bab ini menyelesaikan masalah nilai awal $y' = f(t, y)$, $y(a) = \alpha$. Teori dasar (kondisi Lipschitz) menjamin solusi tunggal dan tidak peka berlebihan terhadap data. Metode Euler adalah yang paling sederhana; metode Taylor orde tinggi dan Runge–Kutta meningkatkan ketelitian tanpa menghitung turunan f.

Metode multilangkah (Adams–Bashforth, Adams–Moulton, prediktor–korektor) memakai nilai-nilai sebelumnya agar hemat evaluasi fungsi. Kendali galat (Runge–Kutta–Fehlberg) menyesuaikan ukuran langkah otomatis. Bab ini juga membahas sistem dan persamaan orde tinggi, kestabilan, dan persamaan kaku (stiff).

Tujuan Pembelajaran

1. Memeriksa kondisi Lipschitz dan kesesuaian ('well-posed') suatu masalah nilai awal.
2. Menjalankan Euler, Taylor, dan Runge–Kutta orde 4 serta menaksir galatnya.
3. Membedakan metode satu-langkah dan multilangkah, eksplisit dan implisit.
4. Mengenali persamaan kaku dan memilih metode yang stabil.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
5.1	The Elementary Theory of Initial-Value Problems	260	Def. 5.1; Def. 5.2; Teo. 5.3; Teo. 5.4; Def. 5.5; Teo. 5.6; 3 contoh
5.2	Euler's Method	266	Lema 5.7; Lema 5.8; Teo. 5.9; Teo. 5.10; 2 contoh
5.3	Higher-Order Taylor Methods	276	Def. 5.11; Teo. 5.12; 1 contoh
5.4	Runge-Kutta Methods	282	Teo. 5.13; 3 contoh
5.5	Error Control and the Runge-Kutta-Fehlberg Method	293	1 contoh
5.6	Multistep Methods	302	Def. 5.14; Def. 5.15; 6 contoh
5.7	Variable Step-Size Multistep Methods	315	1 contoh
5.8	Extrapolation Methods	321	1 contoh
5.9	Higher-Order Equations and Systems of Differential Equations	328	Def. 5.16; Teo. 5.17; 1 contoh
5.10	Stability	339	Def. 5.18; Def. 5.19; Teo. 5.20; Teo. 5.21; Def. 5.22; Def. 5.23; Teo. 5.24; 5 contoh
5.11	Stiff Differential Equations	348	Def. 5.25
5.12	Survey of Methods and Software	355	–

Rumus dan Metode Kunci

Kondisi Lipschitz

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

Metode Euler

$$w_{i+1} = w_i + h\,f(t_i, w_i)$$

Batas galat Euler ($|y''| \leq M$)

$$|y(t_i) - w_i| \leq \tfrac{hM}{2L}[e^{L(t_i - a)} - 1]$$

Runge-Kutta orde 4

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i), \quad k_2 = hf(t_i + \tfrac{h}{2},\ w_i + \tfrac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t_i + \tfrac{h}{2},\ w_i + \tfrac{k_2}{2}), \quad k_4 = hf(t_i + h,\ w_i + k_3)$$

Adams-Bashforth 4 langkah

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

Paulus Siahaan

Adams–Moulton 3 langkah

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.1 The Elementary Theory of Initial-Value Problems

Rujukan buku: halaman 260

Hampir semua model perubahan dalam sains dan rekayasa berbentuk masalah nilai awal (MNA): kita mencari fungsi $y(t)$ yang memenuhi persamaan diferensial biasa orde satu beserta satu syarat awal,

$$y'(t) = f(t, y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha.$$

Hampir tidak pernah solusi eksaknya dapat ditulis dalam bentuk rumus tertutup, sehingga bab ini membahas hampiran. Metode-metode di bab ini tidak menghasilkan fungsi kontinu, melainkan nilai $w_i \approx y(t_i)$ di sejumlah titik jala t_i yang biasanya berjarak sama; bila nilai di titik antara diperlukan, dipakai interpolasi. Sebelum merancang metode, ada tiga pertanyaan teoretis yang harus dijawab: apakah solusi ada, apakah tunggal, dan apakah solusi itu tidak terlalu peka terhadap gangguan kecil pada data. Seksi ini menjawab ketiganya dengan satu gagasan pusat, yaitu kondisi Lipschitz.

Fungsi $f(t, y)$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz terhadap variabel y pada himpunan D bila ada konstanta $L > 0$ sehingga

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

untuk setiap dua titik (t, y_1) dan (t, y_2) di D. Artinya, dengan t dikunci, perubahan nilai f tidak pernah lebih besar daripada L kali perubahan y. Memeriksa definisi ini secara langsung sering merepotkan, sehingga dipakai kriteria yang lebih mudah: jika D konveks (setiap ruas garis yang menghubungkan dua titik di D seluruhnya terletak di D) dan $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \le L$ di seluruh D, maka f Lipschitz dengan konstanta L. Buktinya adalah Teorema Nilai Rata-rata untuk $y \mapsto f(t, y)$. Perhatikan bahwa ini hanya syarat cukup: fungsi $f(t, y) = t|y|$ Lipschitz terhadap y meskipun $\partial f/\partial y$ tidak ada di $y = 0$. Himpunan yang kita pakai hampir selalu berupa pita $D = \{(t, y) \mid a \le t \le b, \ -\infty < y < \infty\}$, yang konveks.

Hasil utama pertama adalah teorema eksistensi dan ketunggalan: bila f kontinu pada pita D dan Lipschitz terhadap y di D, maka MNA mempunyai tepat satu solusi $y(t)$ pada seluruh selang $[a, b]$. Kata "seluruh selang" penting. Untuk $y' = y^2$, $y(0) = 1$, fungsi f tidak Lipschitz pada seluruh pita, dan solusinya $y = \frac{1}{1 - t}$ meledak di $t = 1$. Sebaliknya, untuk $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, ketunggalan hilang: $y \equiv 0$ dan $y = t^3$ keduanya solusi.

Hasil kedua menyangkut kestabilan terhadap gangguan. MNA disebut well-posed (benar-benar terpasang dengan baik) bila solusinya tunggal dan ada konstanta k sedemikian sehingga untuk setiap gangguan kecil, yaitu $|\delta(t)| < \varepsilon$ pada $[a, b]$ dan $|\delta_0| < \varepsilon$, masalah terganggu

$$z'(t) = f(t, z) + \delta(t), \qquad z(a) = \alpha + \delta_0$$

mempunyai solusi tunggal $z(t)$ dengan $|z(t) - y(t)| < k\varepsilon$ di seluruh $[a, b]$. Teorema: jika f kontinu dan Lipschitz terhadap y pada pita D, maka MNA well-posed. Intuisinya: selisih $e = z - y$ memenuhi $|e'| \le L|e| + \varepsilon$, dan lemma jenis Gronwall menghasilkan $|e(t)| \le \varepsilon e^{L(t-a)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1)$, sehingga k cukup besar tetapi berhingga.

Mengapa ini penting bagi analisis numerik? Setiap galat pembulatan dan galat pemotongan di tiap langkah dapat dipandang sebagai gangguan δ pada persamaan. Bila masalah aslinya tidak well-posed, tidak ada alasan mengharapkan hampiran akan dekat dengan solusi sebenarnya. Konstanta Lipschitz L juga muncul kembali sebagai pengendali pertumbuhan galat pada batas galat metode Euler (Seksi 5.2), dan gagasan kestabilan ini dikembangkan lebih jauh di Seksi 5.10.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Masalah nilai awal (MNA) — Persamaan $y' = f(t, y)$ pada $[a, b]$ bersama syarat $y(a) = \alpha$. Metode numerik menghasilkan nilai $w_i \approx y(t_i)$ di titik jala, bukan fungsi kontinu.

Kondisi Lipschitz — Ada $L > 0$ dengan $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ pada D. Kondisi ini membatasi seberapa cepat f berubah terhadap y.

Himpunan konveks — Himpunan yang memuat seluruh ruas garis antara dua titik anggotanya. Pita $\{a \le t \le b, \ -\infty < y < \infty\}$ adalah konveks, sehingga kriteria turunan parsial dapat dipakai.

Kriteria turunan parsial — Jika $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$ pada himpunan konveks D, maka f Lipschitz di D dengan konstanta L. Ini syarat cukup, bukan syarat perlu.

Teorema eksistensi-ketunggalan — Bila f kontinu dan Lipschitz terhadap y pada pita D, MNA punya tepat satu solusi pada seluruh $[a, b]$.

Masalah terganggu — Versi $z' = f(t, z) + \delta(t)$, $z(a) = \alpha + \delta_0$ dari MNA. Galat pembulatan dan galat metode berperan sebagai gangguan δ.

Well-posed — Solusi tunggal dan gangguan berukuran kurang dari ε mengubah solusi kurang dari $k\varepsilon$. Syarat dasar agar hampiran numerik bermakna.

Kondisi Lipschitz

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

Kriteria turunan parsial

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \le L \ \text{ di } D \ \Rightarrow \ f \text{ Lipschitz dengan konstanta } L$$

MNA terganggu

$$z' = f(t, z) + \delta(t), \quad z(a) = \alpha + \delta_0$$

Batas selisih solusi (Gronwall)

$$|z(t) - y(t)| \le \varepsilon\, e^{L(t-a)} + \tfrac{\varepsilon}{L}(e^{L(t-a)} - 1)$$

Contoh 1: Konstanta Lipschitz lewat turunan parsial

Tunjukkan bahwa $f(t, y) = t\,e^{-y^2}$ Lipschitz terhadap y pada pita $D = \{0 \le t \le 3, \ -\infty < y < \infty\}$ dan tentukan sebuah konstanta Lipschitz. Simpulkan apakah MNA $y' = t\,e^{-y^2}$, $y(0) = 1$ mempunyai solusi tunggal.

Penyelesaian.

Himpunan D konveks dan f kontinu. Turunan parsialnya

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ty\,e^{-y^2}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = t \cdot 2|y|e^{-y^2}.$$

Fungsi $g(y) = 2|y|e^{-y^2}$ mencapai maksimum di $|y| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (dari $g'(y) = 0$ untuk $y > 0$: $2 - 4y^2 = 0$), dengan nilai $g_{\max} = \sqrt{2}\,e^{-1/2} = \sqrt{2/e} \approx 0{,}8578$. Karena $t \le 3$,

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 3\sqrt{2/e} \approx 2{,}5733 =: L.$

Jadi f Lipschitz terhadap y pada D dengan $L \approx 2{,}5733$. Karena f kontinu pada D, teorema eksistensi-ketunggalan menjamin MNA punya tepat satu solusi pada $[0, 3]$ (dan MNA itu well-posed).

Contoh 2: Seberapa peka solusi terhadap gangguan?

MNA $y' = 3y + t$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$ dan masalah terganggu $z' = 3z + t + \delta$, $z(0) = 1 + \delta_0$ dengan δ, δ_0 konstanta, $|\delta| < \varepsilon$, $|\delta_0| < \varepsilon$. Hitung selisih $z - y$ dan cari konstanta k.

Penyelesaian.

Karena $\partial f/\partial y = 3$, MNA ini well-posed dengan $L = 3$. Selisih $e = z - y$ memenuhi $e' = 3e + \delta$, $e(0) = \delta_0$, sehingga

$$e(t) = \delta_0 e^{3t} + \tfrac{\delta}{3}(e^{3t} - 1).$$

Pada $0 \le t \le 1$ fungsi ini naik terhadap t, jadi nilai terbesar $|e|$ dicapai di $t = 1$:

$$|e(t)| < \varepsilon\left(e^3 + \tfrac{e^3 - 1}{3}\right) = \varepsilon\left(\tfrac{4e^3 - 1}{3}\right) \approx 26{,}447\,\varepsilon,$$

dengan $e^3 \approx 20{,}0855$. Maka $k \approx 26{,}447$ berlaku. Contoh angka: untuk $\varepsilon = 0{,}01$ dan $\delta = \delta_0 = \varepsilon$ diperoleh $e(1) \approx 0{,}2645$. Gangguan $0{,}01$ membesar sekitar 26 kali pada $t = 1$: masih terbatas (well-posed), tetapi konstanta k tumbuh eksponensial terhadap $L(b - a)$.

Contoh 3: Ketika syarat Lipschitz gagal

Tunjukkan bahwa MNA $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ mempunyai lebih dari satu solusi, dan jelaskan mengapa teorema tidak berlaku. Untuk $y' = y^2$, $y(0) = 1$, hitung nilai solusi di $t = 0{,}9$ dan $t = 0{,}99$.

Penyelesaian.

Fungsi $y \equiv 0$ jelas solusi. Untuk $y = t^3$ ($t \ge 0$): $y' = 3t^2$ dan $3y^{2/3} = 3(t^3)^{2/3} = 3t^2$, sehingga $y = t^3$ juga solusi dengan $y(0) = 0$. Ketunggalan gagal karena $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-1/3}$ tidak terbatas di sekitar $y = 0$, jadi f tidak Lipschitz di sekitar $y = 0$.

Untuk $y' = y^2$ pemisahan variabel memberi $y = \frac{1}{1 - t}$. Maka $y(0{,}9) = 10{,}0$ dan $y(0{,}99) = 100{,}0$, dan $y \to \infty$ saat $t \to 1^-$. Di sini $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2|y|$ tidak terbatas pada pita, sehingga tidak ada Lipschitz global, dan solusi tidak ada pada seluruh $[0, 2]$.

Kesalahan umum

• Menganggap kondisi Lipschitz sama dengan terdiferensialkan. Fungsi $f = t|y|$ Lipschitz tetapi tidak terdiferensialkan di $y = 0$; sebaliknya turunan yang ada belum cukup jika turunannya tidak terbatas.

• Memakai kriteria $|\partial f/\partial y| \le L$ pada himpunan yang tidak konveks atau pada domain tak terbatas tanpa memeriksa batasnya. Untuk $f = y^2$ pada seluruh pita, $|\partial f/\partial y| = 2|y|$ tidak terbatas sehingga tidak ada L.

• Mengira well-posed berarti galat tidak membesar. Well-posed hanya menjamin gangguan ε menghasilkan perubahan paling banyak $k\varepsilon$ dengan k berhingga, dan k bisa sangat besar.

• Menyimpulkan solusi tunggal ada pada selang $[a, b]$ yang diberikan padahal syarat Lipschitz hanya berlaku lokal. Solusi bisa meledak sebelum mencapai b, seperti pada $y' = y^2$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa metode numerik yang baik tidak mungkin dibangun untuk MNA yang tidak well-posed? Hubungkan jawaban Anda dengan galat pembulatan.
2. Berikan contoh fungsi yang Lipschitz terhadap y tetapi $\partial f/\partial y$ tidak ada di beberapa titik. Mengapa teorema turunan parsial tetap tidak bertentangan?
3. Pada MNA yang mana kita boleh mengharapkan konstanta k pada definisi well-posed berukuran besar, dan apa dampaknya pada hampiran numerik untuk selang $[a, b]$ yang panjang?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tunjukkan bahwa $f(t, y) = \sin(ty) + \frac{y}{1+t^2}$ Lipschitz terhadap y pada pita $0 \le t \le 2$ dan berikan konstanta L.

Kunci: $\frac{\partial f}{\partial y} = t\cos(ty) + \frac{1}{1+t^2}$, sehingga $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le t + 1 \le 3$ untuk $0 \le t \le 2$. Jadi $L = 3$ dan f Lipschitz pada pita (himpunan konveks, f kontinu), sehingga MNA-nya punya solusi tunggal.

2. Untuk $y' = -4y + \cos t$ pada $[0, 1]$, bentuk selisih $e = z - y$ untuk gangguan konstan δ, δ_0 dan gunakan batas Gronwall dengan $L = 4$ untuk mendapatkan k pada $t = 1$.

Kunci: $e' = -4e + \delta$, $e(0) = \delta_0$, jadi $e(t) = \delta_0 e^{-4t} + \frac{\delta}{4}(1 - e^{-4t})$ dan $|e| < \varepsilon$ untuk semua $t \ge 0$, sehingga sebenarnya $k = 1$ cukup. Batas Gronwall umum $\varepsilon\left(e^4 + \frac{e^4-1}{4}\right) \approx 68{,}00\,\varepsilon$ benar tetapi sangat longgar, karena turunan parsialnya negatif sehingga gangguan meluruh.

3. Mengapa MNA $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ tidak dijamin punya solusi tunggal? Berikan dua solusi.

Kunci: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\operatorname{sign}(y)}{2\sqrt{|y|}}$ tidak terbatas di dekat $y = 0$, jadi tidak Lipschitz di sana. Solusi: $y \equiv 0$ dan $y = \frac{t^2}{4}$ untuk $t \ge 0$ (periksa: $y' = \frac{t}{2} = \sqrt{t^2/4}$).

5.2 Euler's Method

Rujukan buku: halaman 266

Metode Euler adalah metode numerik paling sederhana untuk masalah nilai awal $ $y' = f(t, y), \qquad a \le t \le b, \qquad y(a) = \alpha,$ $ dengan asumsi masalahnya well-posed. Meskipun jarang dipakai langsung karena kurang teliti, Euler berguna karena seluruh gagasan untuk metode yang lebih canggih (turunan galat, analisis kestabilan, kontrol langkah) dapat dipelajari di sini tanpa aljabar yang berat.

Pertama selang $[a, b]$ dibagi menjadi N bagian sama panjang, sehingga ada titik jala $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, dengan ukuran langkah $h = \frac{b-a}{N}$. Tujuan kita adalah hampiran $w_i \approx y(t_i)$. Turunannya memakai Teorema Taylor: bila solusi y memiliki turunan kedua kontinu, maka

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\, y'(t_i) + \tfrac{h^2}{2} y''(\xi_i), \qquad \xi_i \in (t_i, t_{i+1}).$$

Karena $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$, suku sisa $\frac{h^2}{2} y''(\xi_i)$ dibuang dan $y(t_i)$ diganti w_i. Hasilnya adalah persamaan beda metode Euler:

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{i+1} = w_i + h\, f(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Secara geometris, dari titik (t_i, w_i) kita bergerak sepanjang garis singgung berkemiringan $f(t_i, w_i)$ sejauh h ke kanan. Jika w_i sudah dekat $y(t_i)$ dan masalahnya well-posed, kemiringan itu mendekati kemiringan solusi sebenarnya. Kurva hasilnya berupa poligon (garis patah), dan galat menumpuk karena tiap langkah mewarisi galat langkah sebelumnya.

Ukuran ketelitian dinyatakan oleh dua galat yang berbeda. Galat pemotongan lokal pada langkah ke-$i+1$ adalah $\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2} y''(\xi_i)$, yaitu $O(h)$. Galat global $|y(t_i) - w_i|$ adalah hasil penumpukan semuanya. Teorema galat Euler menyatakan: jika f kontinu dan Lipschitz dengan konstanta L pada pita $D = \{a \le t \le b, \ -\infty < y < \infty\}$, dan ada M dengan $|y''(t)| \le M$ pada $[a, b]$, maka

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right).$$

Jadi galat global juga $O(h)$: memperkecil h setengahnya kira-kira memperkecil galat setengahnya. Pembuktiannya memakai dua lema: $0 \le (1 + x)^m \le e^{mx}$ untuk $x \ge -1$, dan bila $a_{i+1} \le (1 + s) a_i + t$ maka $a_{i+1} \le e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$. Faktor $e^{L(t_i - a)}$ menunjukkan bahwa galat bisa tumbuh eksponensial terhadap t, tetapi tidak lebih buruk dari itu.

Galat pembulatan mengubah gambaran ini. Bila tiap langkah mengandung galat pembulatan paling besar δ dan galat awal δ_0, batasnya menjadi

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right) + |\delta_0| e^{L(t_i - a)}.$$

Suku $\frac{\delta}{h}$ membesar jika $h \to 0$, sehingga memperkecil h tanpa batas justru tidak bermanfaat; ukuran langkah paling baik kira-kira $h = \sqrt{2\delta / M}$.

Kelemahan Euler yang lain adalah kestabilan. Untuk persamaan uji $y' = \lambda y$ dengan $\lambda < 0$, metode menghasilkan $w_n = (1 + h\lambda)^n w_0$, yang hanya meluruh bila $|1 + h\lambda| < 1$, yaitu $h < \frac{2}{|\lambda|}$. Karena orde yang rendah dan batas kestabilan ini, metode orde lebih tinggi (Seksi 5.3 dan 5.4) hampir selalu dipilih untuk perhitungan serius, sementara Euler tetap menjadi dasar teori dan sering dipakai sebagai langkah awal.

Konsep kunci

Titik jala dan ukuran langkah — Titik $t_i = a + ih$ dengan $h = \frac{b-a}{N}$. Hampiran w_i hanya dihitung di titik-titik ini; nilai lain diperoleh dengan interpolasi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Persamaan beda Euler — $w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$ dengan $w_0 = \alpha$. Diperoleh dari Teorema Taylor orde satu dengan membuang suku sisa.

Tafsir geometris — Setiap langkah mengikuti garis singgung di (t_i, w_i) sejauh h. Kurva hampiran berupa garis patah.

Galat pemotongan lokal — $\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2}y''(\xi_i)$, yaitu $O(h)$: kegagalan solusi eksak memenuhi persamaan beda dalam satu langkah.

Batas galat global — Dengan Lipschitz L dan $|y''| \le M$: $|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}(e^{L(t_i - a)} - 1)$, jadi galat global $O(h)$.

Galat pembulatan — Menambah suku $\frac{\delta}{h}$ pada batas galat, sehingga h yang terlalu kecil memperburuk hasil. Langkah terbaik sekitar $\sqrt{2\delta/M}$.

Kestabilan Euler — Untuk $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$, hasilnya $(1 + h\lambda)^n$; peluruhan hanya terjadi jika $h < 2/|\lambda|$.

Metode Euler

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{i+1} = w_i + h\, f(t_i, w_i)$$

Galat pemotongan lokal

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i) = \frac{h}{2}y''(\xi_i)$$

Batas galat global

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right)$$

Batas galat dengan pembulatan

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h}\right)\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right) + |\delta_0| e^{L(t_i - a)}$$

Kestabilan pada $y' = \lambda y$

$$w_n = (1 + h\lambda)^n w_0$$

Algoritma: Metode Euler

1. Masukkan a, b, bilangan bulat N, dan nilai awal α.
2. Hitung $h = \frac{b - a}{N}$, set $t = a$, $w = \alpha$, dan keluarkan (t, w).
3. Untuk $i = 1, 2, \ldots, N$: hitung $w = w + h\, f(t, w)$ (nilai t di ruas kanan adalah t_{i-1}), lalu $t = a + ih$.
4. Keluarkan (t, w) setelah setiap langkah, kemudian berhenti.

Contoh 1: Euler pada $y' = -y + t$ dengan $h = 0{,}25$

Gunakan metode Euler dengan $h = 0{,}25$ untuk $y' = -y + t$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$. Solusi eksaknya $y = t - 1 + 2e^{-t}$. Hitung $w_1, \ldots, w_4$ dan bandingkan dengan solusi eksak.

Penyelesaian.

Di sini $f(t, y) = -y + t$ dan $w_{i+1} = w_i + 0{,}25(-w_i + t_i)$. Hasilnya:

$t = 0{,}00$: $w = 1{,}00000$, $y = 1{,}00000$, galat $0{,}00000$

$t = 0{,}25$: $w = 0{,}75000$, $y = 0{,}80760$, galat $0{,}05760$

$t = 0{,}50$: $w = 0{,}62500$, $y = 0{,}71306$, galat $0{,}08806$

$t = 0{,}75$: $w = 0{,}59375$, $y = 0{,}69473$, galat $0{,}10098$

$t = 1{,}00$: $w = 0{,}63281$, $y = 0{,}73576$, galat $0{,}10295$

Galat di $t = 1$ adalah $0{,}10295$.

Contoh 2: Memeriksa batas galat dan efek mengecilkan h

Untuk masalah di Contoh 1, hitung batas galat teoretis di $t = 1$ dengan $h = 0{,}25$, lalu bandingkan dengan galat sebenarnya. Ulangi hitungan Euler dengan $h = 0{,}125$ dan hitung rasio galat.

Penyelesaian.

Dengan $f = -y + t$ kita punya $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ sehingga $L = 1$. Karena $y'' = 2e^{-t}$, maka $|y''| \le M = 2$ pada $[0, 1]$. Batasnya:

$$|y(1) - w_4| \le \frac{hM}{2L}(e^{L} - 1) = \frac{0{,}25 \cdot 2}{2}(e - 1) \approx 0{,}4296.$$

Galat sebenarnya $0{,}1029$, jadi batasnya benar tetapi cukup longgar (sekitar 4 kali). Dengan $h = 0{,}125$ ($N = 8$) diperoleh w_8 dan galat $0{,}0485$. Rasio galat $\frac{0{,}1029}{0{,}0485} \approx 2{,}12$, mendekati 2, sesuai sifat $O(h)$.

Contoh 3: Batas kestabilan Euler

Terapkan metode Euler pada $y' = -10y$, $y(0) = 1$ (solusi eksak e^{-10t}) dengan $h = 0{,}25$ dan $h = 0{,}1$. Bandingkan w_4 dan w_{10} dengan nilai eksak $y(1)$.

Penyelesaian.

Euler memberi $w_n = (1 - 10h)^n$. Untuk $h = 0{,}25$: faktor $1 - 2{,}5 = -1{,}5$, sehingga $w_1 = -1{,}5$, $w_2 = 2{,}25$, $w_3 = -3{,}375$, $w_4 = 5{,}0625$. Nilainya berosilasi tanda dan membesar, padahal solusi eksak meluruh ke $y(1) = e^{-10} \approx 4{,}54 \cdot 10^{-5}$. Syarat kestabilan $h < \frac{2}{10} = 0{,}2$ dilanggar.

Untuk $h = 0{,}1$: faktor $1 - 1 = 0$, sehingga $w_1 = w_2 = \cdots = 0$. Hasilnya stabil (menuju nol seperti solusi), namun sangat kasar: $w_{10} = 0$ versus $y(1) \approx 4{,}54 \cdot 10^{-5}$. Jadi $h < 2/|\lambda|$ memberi kestabilan, tetapi ketelitian masih membutuhkan h yang jauh lebih kecil.

Kesalahan umum

• Mengira galat global sama dengan galat lokal $\frac{h^2}{2}y''$. Galat lokal per langkah adalah $O(h^2)$ pada nilai w (dan $O(h)$ pada τ), tetapi setelah $N = O(1/h)$ langkah galat global menjadi $O(h)$.

• Memakai t_i yang salah dalam $f(t_i, w_i)$ (misalnya t_{i+1}) sehingga metode berubah menjadi bentuk implisit atau salah waktu.

• Memperkecil h tanpa batas dengan harapan galat terus menurun. Galat pembulatan $\approx \delta/h$ akhirnya mendominasi.

• Menganggap batas galat teoremanya adalah galat sebenarnya. Batas itu memakai M dan L yang kasar sehingga sering jauh lebih besar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa Euler dengan h dibagi dua hanya mengurangi galat setengahnya, padahal galat lokalnya $O(h^2)$? Jelaskan peran jumlah langkah.
2. Pada $y' = \lambda y$ dengan $\lambda < 0$ besar, apa akibat memilih $h > 2/|\lambda|$, dan mengapa ini mengganggu padahal solusi eksaknya halus?
3. Bagaimana Anda memperoleh nilai $y(t)$ di titik antara t_i dan t_{i+1} dari keluaran Euler, dan seberapa teliti hasilnya?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Dengan $y' = y\cos t$, $y(0) = 1$ (solusi eksak $e^{\sin t}$), hitung dua langkah Euler dengan $h = 0{,}5$ dan bandingkan dengan $y(1)$.

Kunci: $w_1 = 1 + 0{,}5(1 \cdot \cos 0) = 1{,}5$; $w_2 = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot 1{,}5\cos(0{,}5) = 2{,}1582$. Eksak: $y(1) = e^{\sin 1} \approx 2{,}3198$, galat $\approx 0{,}1616$.

2. Kerjakan $y' = -20y$, $y(0) = 1$: berapa h maksimum agar Euler stabil (meluruh), dan berapa w_5 bila $h = 0{,}05$?

Kunci: Syarat $|1 - 20h| < 1$ memberi $h < 0{,}1$. Untuk $h = 0{,}05$: faktor 0, jadi $w_5 = 0$.

3. Euler dipakai pada MNA dengan $L = 2$ dan $|y''| \le 3$ pada $[0, 1]$ dengan $h = 0{,}1$. Hitung batas galat di $t = 1$.

Kunci: $\frac{hM}{2L}(e^L - 1) = \frac{0{,}1 \cdot 3}{4}(e^2 - 1) = 0{,}075 \cdot 6{,}3891 \approx 0{,}4792$.

5.3 Higher-Order Taylor Methods

Rujukan buku: halaman 276

Metode Euler memiliki galat pemotongan lokal hanya $O(h)$. Seksi ini mencari metode satu langkah yang lebih teliti, dan lebih dulu perlu alat untuk membandingkan metode. Alat itu adalah galat pemotongan lokal. Untuk metode satu langkah $w_{i+1} = w_i + h\,\phi(t_i, w_i)$, galat pemotongan lokal pada langkah ke-$(i+1)$ didefinisikan

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i),$$

di mana $y_i = y(t_i)$ adalah nilai solusi eksak. Dengan kata lain, kita menyuapkan solusi eksak ke dalam rumus metode dan mengukur seberapa besar rumus itu meleset, dibagi h. Ukuran ini bersifat lokal karena mengandaikan langkah sebelumnya tepat. Untuk Euler, $\tau_{i+1}(h) = \frac{h}{2}y''(\xi_i)$ sehingga $|\tau_{i+1}| \le \frac{hM}{2}$, yaitu $O(h)$. Gagasan umumnya: pilih metode yang galat lokalnya $O(h^p)$ dengan p sebesar mungkin selama biaya hitung masuk akal.

Cara paling langsung adalah memperpanjang penurunan Euler: kembangkan solusi dengan polinom Taylor derajat n di sekitar t_i,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \tfrac{h^2}{2}y''(t_i) + \cdots + \tfrac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i) + \tfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_i).$$

Turunan solusi dapat dinyatakan lewat f karena $y' = f(t, y(t))$: $y'' = f'(t, y)$, dan umumnya $y^{(k)} = f^{(k-1)}(t, y)$, dengan turunan total terhadap t. Satu turunan total berbentuk $f' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}f$. Membuang suku sisa menghasilkan metode Taylor orde n:

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{i+1} = w_i + h\,T^{(n)}(t_i, w_i), \qquad T^{(n)}(t, w) = f + \tfrac{h}{2}f' + \cdots + \tfrac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}.$$

Euler tidak lain adalah metode Taylor orde satu. Galat pemotongan lokalnya adalah $\tau_{i+1}(h) = \frac{h^n}{(n+1)!}f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))$, yaitu $O(h^n)$ asalkan solusi memiliki $n+1$ turunan kontinu terbatas. Dengan syarat yang wajar, galat global juga berorde $O(h^n)$ (bukti umum untuk metode satu langkah dibahas di seksi-seksi berikutnya). Ini jelas lebih baik: dengan orde 2, membagi dua h memperkecil galat kira-kira empat kali, dan untuk orde 3 delapan kali.

Harganya adalah turunan. Untuk n besar, kita perlu menghitung $f', f'', \ldots$ secara simbolik; pekerjaan ini cepat menjadi sangat rumit, terutama jika f bergantung pada y dan t secara bersamaan, dan harus dilakukan ulang untuk setiap persamaan baru. Karena itulah metode Taylor jarang dipakai langsung dalam program umum. Peran pentingnya adalah sebagai patokan: metode Runge-Kutta (Seksi 5.4) dirancang untuk memperoleh orde Taylor tanpa menghitung turunan f sama sekali, dan teori galat pemotongan lokal di seksi ini dipakai untuk menurunkannya.

Satu keuntungan tambahan: karena $f(t_i, w_i) \approx y'(t_i)$ tersedia, kita memiliki nilai dan turunan hampiran di setiap titik jala. Ini persis data yang dibutuhkan interpolasi Hermite. Nilai di titik antara dapat dihampiri dengan polinom Hermite kubik pada $[t_i, t_{i+1}]$, yang galatnya (untuk data eksak) paling besar $\frac{h^4}{384}\max|y^{(4)}|$, jauh lebih baik daripada interpolasi linear yang hanya $O(h^2)$.

Konsep kunci

Galat pemotongan lokal — $\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$: seberapa besar solusi eksak gagal memenuhi persamaan beda dalam satu langkah, dibagi h.

Orde metode — Metode berorde p bila $\tau_{i+1}(h) = O(h^p)$. Orde lebih tinggi berarti galat berkurang lebih cepat saat h diperkecil.

Metode Taylor orde n — $w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i)$ dengan $T^{(n)} = f + \frac{h}{2}f' + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}$. Euler adalah kasus $n = 1$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Turunan total f' — $f'(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f$. Turunan berikutnya memakai aturan rantai yang sama dan makin kompleks.

Kelemahan praktis — Memerlukan turunan simbolik $f', f'', \ldots$ yang mahal dan rawan salah; inilah alasan Runge-Kutta dikembangkan.

Interpolasi Hermite — Data w_i dan $f(t_i, w_i) \approx y'(t_i)$ tersedia di tiap titik jala, sehingga polinom Hermite kubik adalah cara alami untuk memperoleh nilai di titik antara.

Galat pemotongan lokal

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i)$$

Metode Taylor orde n

$$w_{i+1} = w_i + h\,T^{(n)}(t_i, w_i)\,, \qquad T^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}(t_i, w_i)$$

Turunan total pertama

$$f'(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\, f(t,y)$$

Galat lokal Taylor orde n

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i)) = O(h^n)$$

Galat interpolasi Hermite kubik

$$|y(t) - H_3(t)| \le \frac{h^4}{384} \max |y^{(4)}|$$

Algoritma: Metode Taylor orde n

1. Turunkan secara analitik $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ sebagai fungsi t dan y (dengan $y' = f$).
2. Set $w_0 = \alpha$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t_0 = a$.
3. Untuk $i = 0, 1, \ldots, N-1$: hitung $T^{(n)}(t_i, w_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{k-1}}{k!} f^{(k-1)}(t_i, w_i)$.
4. Set $w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i)$ dan $t_{i+1} = a + (i+1)h$; keluarkan (t_{i+1}, w_{i+1}).

Contoh 1: Taylor orde 1, 2, dan 3 pada $y' = ty$

MNA $y' = ty$, $y(0) = 1$ mempunyai solusi eksak $y = e^{t^2/2}$. Turunkan $T^{(2)}$ dan $T^{(3)}$, lalu hitung hampiran $y(1)$ dengan $N = 5$ ($h = 0{,}2$) dan $N = 10$ ($h = 0{,}1$).

Penyelesaian.

Dengan $f = ty$ dan $y' = ty$:

$$f' = y + t \cdot ty = (1 + t^2)y, \qquad f'' = \frac{d}{dt}\left[(1+t^2)y\right] = 2ty + (1+t^2)ty = t(3+t^2)y.$$

Maka $T^{(2)} = ty + \frac{h}{2}(1+t^2)y$ dan $T^{(3)} = T^{(2)} + \frac{h^2}{6} t(3+t^2)y$. Hasil di $t = 1$ (eksak $y(1) = 1{,}648721$):

Orde 1: $N=5$: $w=1{,}459261$, galat $1{,}89\cdot10^{-1}$; $N=10$: $w=1{,}547110$, galat $1{,}02\cdot10^{-1}$.

Orde 2: $N=5$: $w=1{,}633408$, galat $1{,}53\cdot10^{-2}$; $N=10$: $w=1{,}644421$, galat $4{,}30\cdot10^{-3}$.

Orde 3: $N=5$: $w=1{,}646331$, galat $2{,}39\cdot10^{-3}$; $N=10$: $w=1{,}648395$, galat $3{,}27\cdot10^{-4}$.

Rasio galat saat h dibagi dua: orde 1: $1{,}86$, orde 2: $3{,}56$, orde 3: $7{,}32$, mendekati 2, 4, dan 8, sesuai 2^n.

Contoh 2: Galat pemotongan lokal Taylor orde 2 untuk $y'=-y$

Untuk $y'=-y$ dengan solusi $y=y_0e^{-(t-t_0)}$, hitung galat pemotongan lokal metode Taylor orde 2 dan periksa bahwa $\tau=O(h^2)$ dengan $y_i=1$ dan $h=0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}05$.

Penyelesaian.

Di sini $f=-y$, $f'=-y'=y$, sehingga $T^{(2)}=-y+\frac{h}{2}y$ dan $w_{i+1}=w_i\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)$. Dengan $y_i=1$ dan $y_{i+1}=e^{-h}$,

$$\tau_{i+1}(h)=\frac{e^{-h}-\left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)}{h}.$$

Hasil: $h=0{,}2$: $\tau=-6{,}346\cdot10^{-3}$; $h=0{,}1$: $\tau=-1{,}626\cdot10^{-3}$; $h=0{,}05$: $\tau=-4{,}115\cdot10^{-4}$. Rasio τ/h^2 kira-kira konstan ($-0{,}1587$, $-0{,}1626$, $-0{,}1646$ dan mendekati $-\frac{1}{6}$), sesuai $\tau=\frac{h^2}{3!}f''(\xi)\to-\frac{h^2}{6}$ karena $f''=-y\approx-1$. Jadi $\tau=O(h^2)$.

Contoh 3: Nilai antara: linear versus Hermite kubik

Untuk $y'=ty$, $y(0)=1$, pakai Taylor orde 2 dengan $h=0{,}2$ untuk mendapat w di $t=0{,}4$ dan $t=0{,}6$. Hampiri $y(0{,}5)$ dengan interpolasi linear dan dengan Hermite kubik memakai w_i dan $f(t_i,w_i)$. Bandingkan dengan $y(0{,}5)=e^{0{,}125}$.

Penyelesaian.

Taylor orde 2 memberi $w(0{,}4)=1{,}082016$ dan $w(0{,}6)=1{,}193680$. Turunannya dari persamaan diferensial: $f(0{,}4,w)=0{,}4w=0{,}432806$ dan $f(0{,}6,w)=0{,}6w=0{,}716208$.

Interpolasi linear: $y(0{,}5)\approx\frac{1}{2}(1{,}082016+1{,}193680)=1{,}137848$, galat $4{,}70\cdot10^{-3}$.

Hermite kubik pada $[0{,}4;0{,}6]$ dengan $s=\frac{t-0{,}4}{0{,}2}=0{,}5$ memakai basis $H_{00}=0{,}5$, $H_{10}=0{,}125$, $H_{01}=0{,}5$, $H_{11}=-0{,}125$:

$$y(0{,}5)\approx0{,}5w_a+0{,}125\,hf_a+0{,}5w_b-0{,}125\,hf_b=1{,}130763,$$

dengan galat $2{,}39\cdot10^{-3}$. Nilai eksak $1{,}133148$. Hermite menghilangkan sebagian besar galat interpolasi (yang pada interpolasi linear sekitar $\frac{h^2}{8}|y''|$) karena memanfaatkan turunan yang tersedia tanpa biaya tambahan. Galat yang tersisa terutama berasal dari galat w itu sendiri, yang berorde h^2 pada Taylor orde 2; dengan Taylor orde 4, selisih Hermite terhadap linear akan jauh lebih mencolok.

Kesalahan umum

• Salah menurunkan f': lupa bahwa y bergantung pada t, sehingga suku $\frac{\partial f}{\partial y} f$ (atau $\frac{\partial f}{\partial y} y'$) terlewat. Selalu hitung turunan total.

• Mengira orde metode Taylor n berarti galat global $O(h^{n+1})$. Galat pemotongan lokal τ berorde h^n dan galat global juga berorde h^n; suku h^{n+1} adalah galat per langkah sebelum dibagi h.

• Lupa bahwa $T^{(n)}$ sendiri memuat h (faktor $\frac{h^{k-1}}{k!}$) sehingga memakai koefisien $\frac{1}{k!}$ tanpa pangkat h yang sesuai.

• Menggunakan interpolasi linear pada keluaran metode orde tinggi dan heran mengapa galat antar titik jauh lebih besar dari galat di titik jala. Galat interpolasi linear $O(h^2)$ menjadi penentu.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa galat pemotongan lokal tidak cukup untuk memberi jaminan galat global? Apa yang tambahan diperlukan agar kedua galat berorde sama?
2. Berikan dua alasan mengapa metode Taylor orde tinggi jarang dipakai dalam perangkat lunak umum, dan jelaskan bagaimana Runge-Kutta mengatasinya.
3. Mengapa interpolasi Hermite adalah pilihan alami untuk nilai antara pada hasil metode Taylor?
4. Jika f hanya bergantung pada t (bukan y), seperti apa metode Taylor orde n dan masalah apa yang dikerjakan sebenarnya?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Turunkan $T^{(2)}$ untuk $y' = t + y$ dan hitung satu langkah dengan $h = 0{,}1$, $y(0) = 1$.

Kunci: $f = t + y$, $f' = 1 + y' = 1 + t + y$. $T^{(2)}(0, 1) = 1 + \frac{0{,}1}{2}(1 + 0 + 1) = 1{,}1$, jadi $w_1 = 1 + 0{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}11$. (Eksak: $y = 2e^t - t - 1$, $y(0{,}1) = 1{,}110342$.)

2. Untuk $y' = y$, $y(0) = 1$, tuliskan metode Taylor orde 2 sebagai $w_{i+1} = c\, w_i$ dan hitung $y(1)$ dengan $h = 0{,}5$.

Kunci: $f' = y$, $T^{(2)} = y + \frac{h}{2} y$, $c = 1 + h + \frac{h^2}{2} = 1{,}625$. $w_2 = 1{,}625^2 = 2{,}640625$ (eksak $e \approx 2{,}7183$).

3. Berapa kali galat berkurang jika h dibagi 5 pada metode Taylor orde 3?

Kunci: Galat global $O(h^3)$, sehingga berkurang kira-kira $5^3 = 125$ kali.

5.4 Runge-Kutta Methods

Rujukan buku: halaman 282

Metode Taylor memiliki orde tinggi tetapi menuntut turunan $f', f'', \dots$ yang melelahkan dan rawan salah. Metode Runge-Kutta (RK) mempertahankan orde Taylor namun hanya memakai nilai f itu sendiri, dievaluasi di beberapa titik dalam satu langkah. Idenya: ganti $T^{(n)}(t,y)$ oleh kombinasi nilai f pada titik-titik terpilih sehingga ekspansi Taylornya cocok dengan $T^{(n)}$ sampai suku h^{n-1}.

Alat dasarnya adalah Teorema Taylor dua variabel: bila f dan semua turunan parsial sampai orde $n+1$ kontinu di sekitar (t_0, y_0), maka $f(t,y) = P_n(t,y) + R_n(t,y)$, dengan P_n polinom Taylor derajat n dalam dua variabel dan R_n sisa berorde $n+1$ dalam $(t-t_0)$ dan $(y-y_0)$.

Penurunan RK orde dua. Kita ingin $a_1 f(t+\alpha_1, y+\beta_1)$ mendekati $T^{(2)} = f + \frac{h}{2}f' = f + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}f$ dengan galat $O(h^2)$. Mengembangkan suku pertama dengan Taylor derajat satu menghasilkan $a_1 f + a_1\alpha_1\frac{\partial f}{\partial t} + a_1\beta_1\frac{\partial f}{\partial y}$. Mencocokkan koefisien f, $\frac{\partial f}{\partial t}$, dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ memberi tiga persamaan dengan solusi $a_1 = 1$, $\alpha_1 = \frac{h}{2}$, $\beta_1 = \frac{h}{2}f(t,y)$. Hasilnya adalah metode titik tengah:

$$w_{i+1} = w_i + h\, f\!\left(t_i + \tfrac{h}{2},\ \ w_i + \tfrac{h}{2} f(t_i, w_i)\right).$$

Bentuk dengan empat parameter, $a_1 f(t,y) + a_2 f(t+\alpha_2, y+\delta_2 f(t,y))$, memberi keluarga metode orde dua; salah satunya adalah metode Euler dimodifikasi (juga disebut metode Heun, rata-rata kemiringan di kedua ujung): $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i,w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i,w_i))]$. Orde tiga dapat dicapai dengan bentuk bersarang yang lebih rumit, tetapi pilihan yang paling populer adalah orde empat, metode Runge-Kutta klasik:

$$k_1 = hf(t_i, w_i), \quad k_2 = hf\!\left(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf\!\left(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$
$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Metode ini memerlukan empat evaluasi f per langkah dan memiliki galat pemotongan lokal $O(h^4)$ (galat global juga $O(h^4)$ untuk f yang cukup mulus). Jika f hanya bergantung pada t, rumus ini tereduksi menjadi aturan Simpson pada $[t_i, t_{i+1}]$, yang menjelaskan mengapa ordenya empat.

Terdapat hubungan antara jumlah evaluasi f per langkah dan orde yang dapat dicapai: satu, dua, tiga, dan empat evaluasi menghasilkan orde satu, dua, tiga, dan empat, tetapi setelah itu ordenya tertinggal: lima evaluasi tetap orde empat, enam evaluasi memberi orde lima, dan seterusnya (orde enam membutuhkan tujuh evaluasi, orde tujuh membutuhkan sembilan). Inilah alasan metode orde empat paling sering dipilih sebagai kompromi antara ketelitian dan biaya.

Dalam penerapan, metode RK satu langkah sangat mudah dipakai: hanya perlu f, tanpa nilai awal tambahan, dan ukuran langkah dapat diubah di tengah jalan. Karena itu RK sering dipakai untuk menghasilkan nilai awal bagi metode banyak langkah (Seksi 5.6) dan menjadi dasar metode adaptif Runge-Kutta-Fehlberg (Seksi 5.5). Kelemahannya adalah biaya evaluasi f yang banyak per langkah bila f mahal.

Konsep kunci

Polinom Taylor dua variabel — $P_n(t,y)$ mengembangkan f di sekitar (t_0,y_0) dalam $(t-t_0)$ dan $(y-y_0)$; sisa R_n berorde $n+1$. Dipakai untuk mencocokkan koefisien pada penurunan RK.

Metode titik tengah — RK orde 2: $w_{i+1} = w_i + hf(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i,w_i))$. Memakai kemiringan di titik tengah langkah hasil prediksi Euler.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Metode Euler dimodifikasi (Heun) — RK orde 2 yang merata-ratakan kemiringan di (t_i, w_i) dan di titik prediksi Euler pada t_{i+1}; setara aturan trapesium.

Runge-Kutta orde empat — Empat evaluasi f per langkah dengan bobot $\frac{1}{6}(1, 2, 2, 1)$. Galat lokal $O(h^4)$. Tanpa turunan f.

Hubungan dengan Simpson — Jika $f = f(t)$ saja, RK4 menjadi aturan Simpson pada $[t_i, t_{i+1}]$; ini menjelaskan orde empat.

Jumlah evaluasi dan orde — Orde 1-4 memerlukan 1-4 evaluasi; orde 5 memerlukan 6, orde 6 memerlukan 7, orde 7 memerlukan 9. Karena itu orde 4 sangat populer.

Metode satu langkah — w_{i+1} hanya bergantung pada w_i sehingga ukuran langkah dapat diubah bebas, tetapi informasi evaluasi sebelumnya tidak dipakai lagi.

Titik tengah

$$w_{i+1} = w_i + h\, f\big(t_i + \tfrac{h}{2},\ w_i + \tfrac{h}{2} f(t_i, w_i)\big)$$

Euler dimodifikasi

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1},\ w_i + hf(t_i, w_i))]$$

Runge-Kutta orde 4: tahap

$$k_1 = hf(t_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\big(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{k_1}{2}\big)$$

$$k_3 = hf\big(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{k_2}{2}\big)$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3)$$

Runge-Kutta orde 4: pembaruan

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Pencocokan koefisien RK2

$$a_1 = 1, \qquad a_1\alpha_1 = \tfrac{h}{2}, \qquad a_1\beta_1 = \tfrac{h}{2} f(t, y)$$

Algoritma: Runge-Kutta orde empat

1. Masukkan a, b, N, dan α. Hitung $h = \frac{b-a}{N}$, set $t = a$, $w = \alpha$, keluarkan (t, w).
2. Untuk $i = 1, 2, \ldots, N$ kerjakan langkah 3-5.
3. Hitung $k_1 = hf(t, w)$, $k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, w + \frac{k_1}{2})$, $k_3 = hf(t + \frac{h}{2}, w + \frac{k_2}{2})$, $k_4 = hf(t + h, w + k_3)$.
4. Set $w = w + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ dan $t = a + ih$.
5. Keluarkan (t, w); setelah N langkah berhenti.

Contoh 1: Satu langkah titik tengah dan Heun

Untuk $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ (solusi eksak $y = \tan t$), hitung w_1 dengan $h = 0{,}5$ memakai metode titik tengah dan metode Euler dimodifikasi.

Penyelesaian.

Titik tengah: $f(0,0) = 1$, jadi titik uji $(0{,}25;\ 0 + 0{,}25 \cdot 1) = (0{,}25;\ 0{,}25)$ dan $f(0{,}25;\ 0{,}25) = 1 + 0{,}0625 = 1{,}0625$. Maka $w_1 = 0 + 0{,}5 \cdot 1{,}0625 = 0{,}53125$.

Euler dimodifikasi: $f(0,0) = 1$; prediksi Euler $0 + 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$, lalu $f(0{,}5;\ 0{,}5) = 1 + 0{,}25 = 1{,}25$. Maka $w_1 = 0 + \frac{0{,}5}{2}(1 + 1{,}25) = 0{,}56250$.

Nilai eksak $y(0{,}5) = \tan 0{,}5 = 0{,}546302$. Galat titik tengah $1{,}51 \cdot 10^{-2}$, galat Euler dimodifikasi $1{,}62 \cdot 10^{-2}$ (Euler murni memberi $w_1 = 0{,}5$ dengan galat $0{,}0463$).

Contoh 2: Satu langkah Runge-Kutta orde empat

Untuk soal yang sama, hitung w_1 dengan RK4 dan $h = 0{,}5$.

Penyelesaian.

$k_1 = 0{,}5\, f(0,0) = 0{,}500000$.

$k_2 = 0{,}5\, f\big(0{,}25;\ 0 + \frac{0{,}500000}{2}\big) = 0{,}5\, f(0{,}25;\ 0{,}25) = 0{,}531250$.

$k_3 = 0{,}5\, f\big(0{,}25;\ \frac{0{,}531250}{2}\big) = 0{,}535278$.

$k_4 = 0{,}5\, f(0{,}5;\ 0{,}535278) = 0{,}643261$.

$$w_1 = \tfrac{1}{6}(0{,}500000 + 2(0{,}531250) + 2(0{,}535278) + 0{,}643261) = 0{,}546053.$$

Galat terhadap $\tan 0{,}5 = 0{,}546302$ hanya $2{,}49 \cdot 10^{-4}$, jauh lebih kecil daripada titik tengah ($1{,}51 \cdot 10^{-2}$) dan Heun ($1{,}62 \cdot 10^{-2}$) dengan langkah yang sama.

Contoh 3: Perbandingan orde: galat saat h dibagi dua

Pada $y' = t(1 - y)$, $y(0) = 0$ (solusi eksak $y = 1 - e^{-t^2/2}$, sehingga $y(2) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}864665$), hitung $y(2)$ dengan Euler, titik tengah, Euler dimodifikasi, dan RK4 untuk $h = 0{,}25$ dan $h = 0{,}125$. Hitung rasio galat.

Penyelesaian.

Euler: $h = 0{,}25$: $w = 0{,}879180$, galat $1{,}45 \cdot 10^{-2}$; $h = 0{,}125$: $w = 0{,}870988$, galat $6{,}32 \cdot 10^{-3}$; rasio galat $2{,}3$

Titik tengah: $h = 0{,}25$: $w = 0{,}863026$, galat $1{,}64 \cdot 10^{-3}$; $h = 0{,}125$: $w = 0{,}864279$, galat $3{,}86 \cdot 10^{-4}$; rasio galat $4{,}2$

Euler dimodifikasi: $h = 0{,}25$: $w = 0{,}857655$, galat $7{,}01 \cdot 10^{-3}$; $h = 0{,}125$: $w = 0{,}863096$, galat $1{,}57 \cdot 10^{-3}$; rasio galat $4{,}5$

Runge-Kutta orde 4: $h = 0{,}25$: $w = 0{,}864604$, galat $6{,}05 \cdot 10^{-5}$; $h = 0{,}125$: $w = 0{,}864661$, galat $3{,}36 \cdot 10^{-6}$; rasio galat $18{,}0$

Rasio galat kira-kira 2^p dengan p orde metode ($2,\ 4,\ 4,\ 16$); penyimpangan wajar karena h belum sangat kecil. Perhatikan juga biaya: RK4 dengan $h = 0{,}25$ memakai 32 evaluasi f dan galatnya $6{,}05 \cdot 10^{-5}$, sedangkan Euler dengan jumlah evaluasi yang sama ($h = \frac{1}{32}$) mempunyai galat $2{,}98 \cdot 10^{-3}$, sekitar 49 kali lebih besar.

Kesalahan umum

• Menukar bobot RK4: memakai $\frac{1}{4}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ atau melupakan faktor 2 pada k_2 dan k_3. Bobot yang benar adalah $\frac{1}{6}(1, 2, 2, 1)$.

• Memakai k_2 yang dihitung dengan $w_i + k_1$ (bukan $\frac{k_1}{2}$) ketika k_i sudah mengandung faktor h. Setengah langkah pada y berarti $\frac{k_1}{2}$ jika $k_1 = hf$.

• Mengira metode orde empat selalu memberi galat lebih kecil daripada metode orde dua untuk setiap h. Orde hanya menjamin perilaku saat h cukup kecil; f yang tidak mulus dapat membatalkan keuntungan itu.

• Membandingkan metode hanya dengan jumlah langkah. Yang adil adalah membandingkan galat pada jumlah evaluasi f yang sama.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa metode titik tengah tidak setara dengan sekadar memakai $f(t_i + \frac{h}{2}, w_i)$ tanpa prediksi Euler pada argumen kedua?
2. Jelaskan mengapa RK4 pada $y' = f(t)$ identik dengan aturan Simpson, dan apa implikasinya terhadap orde galatnya.
3. Metode RK orde lima memerlukan enam evaluasi f per langkah. Dalam keadaan apa RK4 dengan h lebih kecil lebih menguntungkan daripada RK orde lima?
4. Apa kelebihan RK (satu langkah) dibanding metode Taylor orde sama, dan apa yang hilang dibanding metode banyak langkah?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $y' = y + t$, $y(0) = 1$, hitung w_1 dengan $h = 0{,}2$ memakai metode titik tengah dan Euler dimodifikasi. Eksak: $y = 2e^t - t - 1$.

Kunci: Titik tengah: $w + hf(0{,}1;\ 1 + 0{,}1 \cdot 1) = 1 + 0{,}2(1{,}1 + 0{,}1) = 1{,}2400$. Euler dimodifikasi: prediksi $1{,}2$, $f(0{,}2; 1{,}2) = 1{,}4$, $w_1 = 1 + 0{,}1(1 + 1{,}4) = 1{,}2400$. Eksak: $y(0{,}2) = 1{,}242806$.

2. Untuk soal yang sama hitung w_1 dengan RK4, $h = 0{,}2$.

Kunci: $k_1 = 0{,}2000$, $k_2 = 0{,}24000$, $k_3 = 0{,}24400$, $k_4 = 0{,}288800$;
$w_1 = 1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1{,}242800$ (eksak $1{,}242806$).

3. Untuk $y' = 3t^2$, $y(0) = 0$, tunjukkan bahwa RK4 dengan $h = 1$ memberi $y(1) = 1$ tepat (eksak $y = t^3$).

Kunci: $k_1 = 3 \cdot 0 = 0$; $k_2 = 3(0{,}5)^2 = 0{,}75$; $k_3 = 0{,}75$; $k_4 = 3 \cdot 1 = 3$. $w_1 = \frac{1}{6}(0 + 1{,}5 + 1{,}5 + 3) = 1$. Ini aturan Simpson yang eksak untuk polinom derajat ≤ 3.

5.5 Error Control and the Runge-Kutta-Fehlberg Method

Rujukan buku: halaman 293

Pada Seksi 4.6 kita melihat bahwa kuadratur adaptif menempatkan titik lebih rapat di tempat fungsi berubah cepat, sehingga menghemat kerja untuk toleransi tertentu. Hal yang sama berlaku untuk masalah nilai awal $y' = f(t, y)$, $y(a) = \alpha$. Idealnya, dengan toleransi ε kita ingin jumlah titik jala sesedikit mungkin agar galat global tidak melebihi ε. Ini tidak sejalan dengan titik berjarak sama: di bagian solusi yang landai langkah boleh besar, sedangkan di bagian yang berubah cepat langkah harus kecil. Metode yang menyesuaikan h_i pada setiap langkah demikian disebut adaptif. Galat global tidak dapat dihitung langsung, tetapi (Seksi 5.10) berkaitan erat dengan galat pemotongan lokal, sehingga yang dikendalikan adalah galat lokal.

Gagasan utama adalah memakai dua metode satu langkah berorde berbeda dari titik yang sama. Misalkan metode berorde n memberi w_{i+1} dengan galat lokal $\tau_{i+1}(h) = O(h^n)$, dan metode berorde $n+1$ memberi $\tilde{w}_{i+1}$ dengan galat lokal $\tilde{\tau}_{i+1}(h) = O(h^{n+1})$. Dengan anggapan $w_i \approx y(t_i) \approx \tilde{w}_i$,

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h} = \tilde{\tau}_{i+1}(h) + \frac{\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}}{h}.$$

Karena $\tilde{\tau}$ berorde lebih tinggi, bagian dominan dari τ adalah suku terakhir, sehingga $\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$. Inilah taksiran galat yang dapat dihitung tanpa turunan tinggi dari y.

Untuk memilih langkah baru qh, anggap $\tau_{i+1}(h) \approx Kh^n$ dengan K tidak bergantung pada h. Maka $\tau_{i+1}(qh) \approx q^n \tau_{i+1}(h) \approx \frac{q^n}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|$. Syarat $|\tau_{i+1}(qh)| \le \varepsilon$ dipenuhi bila

$$q \le \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|} \right)^{1/n}.$$

Jika $q < 1$, langkah sekarang tidak cukup teliti: ditolak dan diulang dengan qh. Jika $q \ge 1$, langkah diterima dan h untuk langkah berikutnya dapat diperbesar menjadi qh.

Metode Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) menerapkan ini dengan $n = 4$ memakai pasangan metode Runge-Kutta orde empat dan lima yang berbagi enam evaluasi f per langkah. Dengan tahap $k_1, \ldots, k_6$, nilai orde empat adalah $w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$ dan nilai orde lima $\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$. Selisih keduanya, dibagi h, menjadi taksiran galat $R = \frac{1}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|$. Enam evaluasi per langkah jauh lebih hemat daripada memakai sepasang metode orde 4 dan 5 sembarang, yang membutuhkan sedikitnya sepuluh evaluasi (hemat sedikitnya 40%).

Dalam praktik, faktor q dipilih lebih konservatif agar langkah yang ditolak jarang terjadi: $q = 0{,}84\left(\frac{\mathrm{TOL}}{R}\right)^{1/4}$. Algoritma juga membatasi perubahan: q tidak boleh lebih kecil dari $0{,}1$ dan tidak boleh lebih besar dari 4, sehingga langkah tidak berubah drastis akibat satu taksiran yang mengelabui. Batas $h_{\max}$ mencegah melompati bagian solusi yang sensitif, sedangkan batas $h_{\min}$ menghentikan proses bila langkah yang dibutuhkan terlalu kecil. Jika $R \le \mathrm{TOL}$, nilai yang diambil sebagai hampiran adalah w_{i+1} (orde empat) pada algoritma ini.

Konsep kunci

Metode adaptif — Ukuran langkah h_i disesuaikan tiap langkah agar galat lokal di bawah toleransi dengan titik jala sesedikit mungkin.

Taksiran galat dengan dua orde — Selisih hampiran orde $n+1$ dan orde n dari titik yang sama: $\tau_{i+1}(h) \approx \frac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$. Tidak memerlukan turunan tinggi y.

Faktor perubahan langkah q — Dari $\tau(qh) \approx q^n \tau(h)$ diperoleh $q \le \left(\frac{\varepsilon h}{|\tilde{w} - w|}\right)^{1/n}$. Jika $q < 1$ langkah ditolak, jika $q \ge 1$ diterima dan h diperbesar.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Runge-Kutta-Fehlberg — Pasangan RK orde 4 dan 5 yang berbagi enam evaluasi f per langkah; selisihnya memberi taksiran galat.

Faktor pengaman 0,84 — Pada RKF45, $q = 0{,}84(\mathrm{TOL}/R)^{1/4}$. Faktor di bawah satu menjaga agar langkah yang diterima jarang kemudian ditolak.

Pembatas langkah — Langkah baru dibatasi $0{,}1h \le h_{baru} \le 4h$, serta $h_{\min} \le h \le h_{\max}$, agar tidak berubah drastis dan tidak melompati bagian sensitif.

Taksiran galat lokal

$$\tau_{i+1}(h) \approx \tfrac{1}{h}(\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1})$$

Faktor langkah (umum)

$$q \le \left(\tfrac{\varepsilon h}{|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|}\right)^{1/n}$$

RKF: faktor praktis

$$R = \tfrac{1}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|, \qquad q = 0{,}84\left(\tfrac{\mathrm{TOL}}{R}\right)^{1/4}$$

RKF: nilai orde 4

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{25}{216}k_1 + \tfrac{1408}{2565}k_3 + \tfrac{2197}{4104}k_4 - \tfrac{1}{5}k_5$$

RKF: nilai orde 5

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \tfrac{16}{135}k_1 + \tfrac{6656}{12825}k_3 + \tfrac{28561}{56430}k_4 - \tfrac{9}{50}k_5 + \tfrac{2}{55}k_6$$

RKF: taksiran galat dari tahap

$$R = \tfrac{1}{h}\left|\tfrac{1}{360}k_1 - \tfrac{128}{4275}k_3 - \tfrac{2197}{75240}k_4 + \tfrac{1}{50}k_5 + \tfrac{2}{55}k_6\right|$$

Algoritma: Runge-Kutta-Fehlberg (kontrol galat)

1. Masukkan a, b, α, TOL, $h_{\max}$, $h_{\min}$. Set $t = a$, $w = \alpha$, $h = h_{\max}$, keluarkan (t, w).
2. Hitung enam tahap: $k_1 = hf(t, w)$, $k_2 = hf(t + \tfrac{h}{4}, w + \tfrac{k_1}{4})$, $k_3 = hf(t + \tfrac{3h}{8}, w + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2)$, $k_4 = hf(t + \tfrac{12h}{13}, w + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3)$.
3. Lanjutkan: $k_5 = hf(t + h, w + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4)$ dan $k_6 = hf(t + \tfrac{h}{2}, w - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5)$.
4. Hitung $R = \tfrac{1}{h}\left|\tfrac{1}{360}k_1 - \tfrac{128}{4275}k_3 - \tfrac{2197}{75240}k_4 + \tfrac{1}{50}k_5 + \tfrac{2}{55}k_6\right|$.
5. Jika $R \le \mathrm{TOL}$: terima langkah, set $t = t + h$ dan $w = w + \tfrac{25}{216}k_1 + \tfrac{1408}{2565}k_3 + \tfrac{2197}{4104}k_4 - \tfrac{1}{5}k_5$, keluarkan (t, w, h).
6. Hitung $\delta = 0{,}84(\mathrm{TOL}/R)^{1/4}$. Jika $\delta \le 0{,}1$ set $h = 0{,}1h$; jika $\delta \ge 4$ set $h = 4h$; selain itu $h = \delta h$.
7. Jika $h > h_{\max}$ set $h = h_{\max}$. Jika $t \ge b$ berhenti. Jika $t + h > b$ set $h = b - t$. Jika $h < h_{\min}$ berhenti dengan pesan gagal. Selain itu kembali ke langkah 2.

Contoh 1: Satu langkah RKF dan keputusan terima atau tolak

Untuk $y' = y(1-y)$, $y(0) = 0{,}1$ (solusi eksak $y = \frac{1}{1+9e^{-t}}$), lakukan satu langkah RKF dengan $h = 0{,}5$. Tentukan R dan keputusan untuk TOL $= 10^{-5}$ dan untuk TOL $= 10^{-6}$.

Penyelesaian.

Tahap: $k_1 = 0{,}045000$, $k_2 = 0{,}049437$, $k_3 = 0{,}052085$, $k_4 = 0{,}063934$, $k_5 = 0{,}065980$, $k_6 = 0{,}054459$.

Nilai orde empat $w = 0{,}15482912$ dan orde lima $\tilde{w} = 0{,}15482769$; selisihnya $|\tilde{w} - w| = 1{,}44 \cdot 10^{-6}$, sehingga $R = \frac{1}{0{,}5}|\tilde{w} - w| = 2{,}87 \cdot 10^{-6}$. Nilai eksak $y(0{,}5) = 0{,}15482810$; galat nilai orde empat $1{,}03 \cdot 10^{-6}$ dan orde lima $4{,}11 \cdot 10^{-7}$ (taksiran selisih cocok dengan galat orde empat).

TOL $= 10^{-5}$: $R \leq$ TOL, langkah diterima. $\delta = 0{,}84(10^{-5}/R)^{1/4} = 1{,}147$, jadi langkah berikutnya $h = 1{,}147 \cdot 0{,}5 = 0{,}5737$.

TOL $= 10^{-6}$: $R >$ TOL, langkah ditolak. $\delta = 0{,}645 < 1$, ulangi dari $t = 0$ dengan $h = 0{,}645 \cdot 0{,}5 = 0{,}3226$, dengan $R = 5{,}38 \cdot 10^{-7}$ pada percobaan ulang itu.

Contoh 2: Aturan perubahan langkah

Dengan TOL $= 10^{-6}$, tentukan perubahan langkah untuk beberapa nilai R hasil taksiran.

Penyelesaian.

$R = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$: $\delta = 0{,}594$, $q = 0{,}594$, langkah ditolak, ulangi, $h_{baru} = 0{,}594\,h$

$R = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$: $\delta = 0{,}840$, $q = 0{,}840$, langkah diterima, $h_{baru} = 0{,}840\,h$

$R = 2{,}0 \cdot 10^{-8}$: $\delta = 2{,}234$, $q = 2{,}234$, langkah diterima, $h_{baru} = 2{,}234\,h$

$R = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$: $\delta = 4{,}724$, $q = 4{,}000$, langkah diterima, $h_{baru} = 4{,}000\,h$

$R = 1{,}0 \cdot 10^{-13}$: $\delta = 47{,}237$, $q = 4{,}000$, langkah diterima, $h_{baru} = 4{,}000\,h$

Terlihat bahwa R sangat kecil tidak menaikkan langkah lebih dari 4 kali sekaligus, dan R yang jauh melebihi TOL tidak mengecilkan langkah di bawah $0{,}1h$ (nilai $\delta \leq 0{,}1$ dipotong menjadi $0{,}1$).

Contoh 3: Menjalankan algoritma pada selang panjang

Jalankan Algoritma RKF pada $y' = y(1-y)$, $y(0) = 0{,}1$ di $[0, 6]$ dengan TOL $= 10^{-6}$, $h_{\max} = 1$, $h_{\min} = 10^{-4}$. Laporkan jumlah langkah, penolakan, evaluasi f, dan galat maksimum, lalu bandingkan dengan RK4 berlangkah tetap berjumlah evaluasi sama.

Penyelesaian.

Hasil perhitungan: 18 langkah diterima dan 2 ditolak, sehingga evaluasi f sebanyak $6 \times (18 + 2) = 120$. Nilai akhir $w(6) = 0{,}9781787$ versus eksak $0{,}9781781$; galat maksimum di titik-titik yang diterima $1{,}14 \cdot 10^{-6}$ (dengan TOL $= 10^{-6}$ yang mengendalikan galat lokal per satuan langkah, galat global tetap sekitar orde TOL). Selain langkah awal $h = h_{\max} = 1{,}000$ (yang langsung ditolak dan dikecilkan), ukuran langkah yang dipakai berkisar sekitar $0{,}293$ sampai $0{,}6$ dan menyesuaikan diri dengan taksiran R di tiap titik.

Sebagai pembanding, RK4 dengan langkah tetap $h = \frac{6}{30}$ (jumlah evaluasi 4×30 sama dengan RKF) memberi galat maksimum $1{,}83 \cdot 10^{-6}$.

Kesalahan umum

• Memakai langkah qh tanpa pengaman. Dengan q murni dari rumus, taksiran galat yang meleset sedikit membuat langkah sering ditolak; karena itu dipakai faktor $0{,}84$ dan batas $0{,}1 \le q \le 4$.

• Mengira $R \le \mathrm{TOL}$ menjamin galat global $\le \mathrm{TOL}$. Yang dikendalikan adalah galat lokal per satuan langkah; galat global dapat sedikit lebih besar karena penumpukan.

• Salah memakai pangkat dalam rumus q: untuk pasangan orde 4 dan 5 pangkatnya $\frac{1}{4}$ (sesuai orde metode yang diperiksa), bukan $\frac{1}{5}$ atau $\frac{1}{2}$.

• Lupa memperlakukan langkah terakhir: bila $t + h > b$, h harus dipotong menjadi $b - t$ agar berhenti tepat di b, dan jangan sampai langkah itu menyebabkan $h < h_{\min}$ yang dianggap kegagalan.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa taksiran galat $\frac{1}{h}|\tilde{w} - w|$ praktis menaksir galat metode berorde rendah, bukan galat metode berorde tinggi?
2. Mengapa metode adaptif pada MNA cenderung menolak langkah lebih sering daripada kuadratur adaptif, dan bagaimana faktor $0{,}84$ menolong?
3. Apa risiko jika $h_{\max}$ dipilih terlalu besar? Berikan contoh solusi yang dapat terlewat sensitivitasnya.
4. Apakah wajar mengambil $\tilde{w}_{i+1}$ (orde lima) sebagai nilai yang diteruskan? Apa untung dan ruginya bila dibandingkan dengan algoritma yang meneruskan w_{i+1}?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Pada suatu langkah $h = 0{,}2$, diperoleh $R = 2 \cdot 10^{-4}$ dengan TOL $= 10^{-5}$. Apakah langkah diterima? Berapa h baru?

Kunci: $R >$ TOL, jadi ditolak. $\delta = 0{,}84(10^{-5}/(2 \cdot 10^{-4}))^{1/4} = 0{,}84 \cdot 0{,}05^{1/4} = 0{,}397$, di antara $0{,}1$ dan 4, sehingga $h_{baru} = 0{,}397 \cdot 0{,}2 = 0{,}0794$ dan langkah diulang.

2. Dengan TOL $= 10^{-8}$ dan $R = 3 \cdot 10^{-9}$, tentukan keputusan dan faktor δ untuk h berikutnya.

Kunci: $R <$ TOL: diterima. $\delta = 0{,}84(10^{-8}/(3 \cdot 10^{-9}))^{1/4} = 0{,}84 \cdot (3{,}333)^{1/4} = 1{,}135$. Karena $0{,}1 < \delta < 4$, $h_{baru} = 1{,}135\, h$ (langkah diperbesar).

3. Berapa jumlah evaluasi f total jika RKF menerima 40 langkah dan menolak 6 langkah? Bandingkan dengan memakai pasangan RK4 dan RK orde lima tersendiri (10 evaluasi per percobaan).

Kunci: RKF: $6 \times (40 + 6) = 276$ evaluasi. Pasangan terpisah: $10 \times 46 = 460$ evaluasi; RKF menghemat $\frac{460 - 276}{460} = 40\%$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.6 Multistep Methods

Rujukan buku: halaman 302

Metode satu langkah seperti Euler, Taylor, dan Runge-Kutta menghitung w_{i+1} hanya dari w_i. Setelah beberapa langkah, kita sebenarnya sudah memiliki banyak nilai hampiran $w_0, w_1, \ldots, w_i$ dan nilai $f(t_j, w_j)$ yang telah dihitung, tetapi semuanya dibuang kecuali yang terakhir. Metode banyak langkah (multistep) memanfaatkan informasi itu: hampiran di titik berikutnya dihitung dari beberapa titik jala sebelumnya. Akibat utamanya adalah penghematan: setelah tahap awal, sebuah metode banyak langkah berorde tinggi cukup memerlukan satu evaluasi f baru per langkah, sedangkan Runge-Kutta orde empat memerlukan empat.

Bentuk umum metode m langkah dengan jala seragam $t_i = a + ih$ adalah

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1} f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})]$$

dengan a_j, b_j konstanta. Bila $b_m = 0$, ruas kanan tidak memuat w_{i+1} dan metodenya eksplisit (terbuka); bila $b_m \neq 0$, w_{i+1} muncul di kedua ruas sehingga metodenya implisit (tertutup) dan setiap langkah menuntut penyelesaian persamaan untuk w_{i+1}. Metode m langkah memerlukan m nilai awal $w_0, \ldots, w_{m-1}$, biasanya diperoleh dari metode satu langkah yang ordenya sama, misalnya Runge-Kutta orde empat. Bila nilai awal kurang teliti, ketelitian seluruh metode ikut rusak.

Keluarga yang paling terkenal adalah metode Adams. Turunannya berangkat dari mengintegralkan persamaan diferensial pada $[t_i, t_{i+1}]$: $y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$. Integran tidak diketahui, sehingga diganti dengan polinomial interpolasi melalui nilai-nilai f yang sudah dihitung. Bentuk beda mundur Newton paling nyaman karena langsung memakai data terbaru. Dengan substitusi $t = t_i + sh$ diperoleh

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + h\sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \nabla^k f(t_i, y(t_i)), \qquad \gamma_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds,$$

dan $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{12},\ \frac{3}{8},\ \frac{251}{720}$. Memotong jumlah pada $k = m-1$ menghasilkan metode Adams-Bashforth m langkah (eksplisit), dengan galat pemotongan lokal berbentuk $\gamma_m\, y^{(m+1)}(\mu_i) h^m$, jadi berorde m. Bila titik (t_{i+1}, f_{i+1}) ikut dijadikan simpul interpolasi, polinomial yang dipakai berderajat satu lebih tinggi dan diperoleh metode Adams-Moulton, yang koefisien galatnya jauh lebih kecil. Metode Adams-Moulton m langkah berorde $m+1$, jadi Adams-Moulton tiga langkah dan Adams-Bashforth empat langkah sama-sama berorde empat dan sama-sama menuntut m nilai f lama, tetapi koefisien galat yang pertama (sekitar $\frac{19}{720}$) jauh lebih kecil dari yang kedua ($\frac{251}{720}$). Metode implisit juga lebih stabil.

Harga yang dibayar metode implisit adalah persamaan untuk w_{i+1}. Untuk f linear dalam y persamaan itu dapat diselesaikan secara aljabar; secara umum tidak, misalnya bila $f(t, y) = e^y$. Karena itu dalam praktik metode implisit hampir selalu dipakai sebagai korektor dalam skema prediktor-korektor: prediktor eksplisit (Adams-Bashforth) memberi taksiran awal w_{i+1}^p, lalu korektor (Adams-Moulton) memakai $f(t_{i+1}, w_{i+1}^p)$ di ruas kanan untuk memperbaikinya. Pasangan Adams-Bashforth empat langkah dan Adams-Moulton tiga langkah dengan nilai awal Runge-Kutta orde empat menghasilkan metode orde empat yang hanya memerlukan dua evaluasi f per langkah. Mengiterasikan korektor berulang-ulang tidak berguna untuk menambah ketelitian, sebab iterasi itu hanya mendekati solusi persamaan implisit, bukan solusi persamaan diferensial; bila ketelitian kurang, lebih efisien memperkecil h.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Kekurangan metode banyak langkah: tidak dapat mulai sendiri (perlu metode satu langkah untuk nilai awal), sulit mengubah ukuran langkah di tengah perhitungan karena rumusnya mengandaikan jarak simpul yang sama, dan kestabilannya perlu diperhatikan. Hal-hal itu dibahas lebih lanjut pada seksi 5.7 (ukuran langkah variabel) dan 5.10 (kestabilan).

Konsep kunci

Metode banyak langkah — Metode yang menghitung w_{i+1} dari lebih dari satu titik jala sebelumnya ($w_i, w_{i-1}, \ldots$) beserta nilai f-nya, sehingga data lama dipakai ulang dan evaluasi f per langkah berkurang.

Metode eksplisit dan implisit — Eksplisit bila $b_m = 0$ sehingga w_{i+1} langsung dihitung; implisit bila $b_m \neq 0$ sehingga w_{i+1} muncul di kedua ruas dan harus dicari dari persamaan (aljabar atau iterasi).

Nilai awal — Metode m langkah memerlukan m nilai awal $w_0, \ldots, w_{m-1}$ dari metode satu langkah berorde setara (mis. Runge-Kutta orde empat); galat di sini terbawa ke seluruh perhitungan.

Metode Adams-Bashforth — Keluarga eksplisit yang diturunkan dengan mengintegralkan polinomial beda mundur melalui $f_i, \ldots, f_{i+1-m}$ pada $[t_i, t_{i+1}]$. Metode m langkah berorde m.

Metode Adams-Moulton — Keluarga implisit yang polinomial interpolasinya juga melalui (t_{i+1}, f_{i+1}). Metode m langkah berorde $m+1$ dengan koefisien galat lebih kecil dan kestabilan lebih baik daripada Adams-Bashforth setara.

Galat pemotongan lokal — $\tau_{i+1}(h)$ mengukur seberapa jauh solusi sejati gagal memenuhi persamaan beda, dibagi h. Untuk Adams-Bashforth empat langkah $\tau_{i+1} = \frac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$.

Prediktor-korektor — Prediktor eksplisit memberi w^p_{i+1}, lalu korektor implisit dievaluasi memakai w^p_{i+1} sehingga tidak perlu menyelesaikan persamaan implisit. Skema ini memerlukan dua evaluasi f per langkah.

Dasar turunan metode Adams

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

Adams-Bashforth dua langkah (orde 2)

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{2}[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})], \qquad \tau_{i+1} = \tfrac{5}{12} y^{(3)}(\mu_i) h^2$$

Adams-Bashforth empat langkah (orde 4)

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}], \qquad \tau_{i+1} = \tfrac{251}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$$

Adams-Moulton dua langkah (orde 3)

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}], \qquad \tau_{i+1} = -\tfrac{1}{24} y^{(4)}(\mu_i) h^3$$

Adams-Moulton tiga langkah (orde 4)

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}], \qquad \tau_{i+1} = -\tfrac{19}{720} y^{(5)}(\mu_i) h^4$$

Koefisien Adams-Bashforth

$$\gamma_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds : \quad 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{12},\ \tfrac{3}{8},\ \tfrac{251}{720}$$

Algoritma: Prediktor-korektor Adams orde empat (AB4 sebagai prediktor, AM3 sebagai korektor)

1. Masukkan a, b, N, α; hitung $h = \frac{b-a}{N}$, $t_0 = a$, $w_0 = \alpha$.
2. Hitung w_1, w_2, w_3 dengan Runge-Kutta orde empat dan simpan $f_j = f(t_j, w_j)$ untuk $j = 0, 1, 2, 3$.
3. Untuk $i = 3, 4, \ldots, N-1$, hitung prediktor: $w^p = w_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$.
4. Hitung $f^p = f(t_{i+1}, w^p)$ (satu-satunya evaluasi baru pada tahap ini).
5. Hitung korektor: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f^p + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$.
6. Hitung $f_{i+1} = f(t_{i+1}, w_{i+1})$ dengan w_{i+1} hasil koreksi (evaluasi kedua), geser data ($f_{i-3} \leftarrow f_{i-2}$, dst.), lalu ulangi hingga $t = b$.

Siahaan

Contoh 1: Adams-Bashforth dua langkah dengan nilai awal eksak

Masalah nilai awal $y' = t + y$, $y(0) = 1$ punya solusi eksak $y(t) = 2e^t - t - 1$. Dengan $h = 0{,}1$ dan nilai awal eksak $w_0 = 1$, $w_1 = y(0{,}1) = 1{,}110342$, hitung w_2, w_3 dengan Adams-Bashforth dua langkah dan bandingkan dengan solusi eksak.

Penyelesaian.

Rumusnya $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[3f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})]$ dengan $f(t, y) = t + y$.

$f(t_0, w_0) = 0 + 1 = 1$ dan $f(t_1, w_1) = 0{,}1 + 1{,}110342 = 1{,}210342$.

$$w_2 = 1{,}110342 + 0{,}05\,[3(1{,}210342) - 1] = 1{,}110342 + 0{,}05(2{,}631025) = 1{,}241893$$

Nilai eksak $y(0{,}2) = 1{,}242806$, galat $9{,}1 \times 10^{-4}$.

Berikutnya $f(t_2, w_2) = 0{,}2 + 1{,}241893 = 1{,}441893$, sehingga

$$w_3 = 1{,}241893 + 0{,}05\,[3(1{,}441893) - 1{,}210342] = 1{,}397660$$

Nilai eksak $y(0{,}3) = 1{,}399718$, galat $2{,}1 \times 10^{-3}$. Galat membesar karena galat pemotongan lokal orde h^3 menumpuk dan tidak ada koreksi implisit.

Contoh 2: Adams-Moulton dua langkah pada masalah linear

Untuk masalah yang sama ($y' = t + y$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$) dan nilai awal eksak $w_0 = 1$, $w_1 = 1{,}110342$, hitung w_2 dengan Adams-Moulton dua langkah. Karena f linear, selesaikan persamaan implisit secara aljabar.

Penyelesaian.

Dengan $f_{i+1} = t_{i+1} + w_{i+1}$ rumus $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]$ menjadi, untuk $i = 1$ ($t_2 = 0{,}2$):

$$w_2 = w_1 + \tfrac{0{,}1}{12}[5(0{,}2 + w_2) + 8(0{,}1 + w_1) - (0 + w_0)]$$

Kumpulkan suku w_2: $\left(1-\frac{5h}{12}\right)w_2 = 0{,}958333\,w_2$. Ruas kanan sisanya bernilai $1{,}191031$, sehingga

$$w_2 = \frac{1{,}191031}{0{,}958333} = 1{,}242815$$

Nilai eksak $1{,}242806$, galat $9{,}7\times10^{-6}$. Galat ini sekitar 100 kali lebih kecil daripada hasil Adams-Bashforth dua langkah pada contoh sebelumnya ($9{,}1\times10^{-4}$), meskipun kedua metode memakai dua nilai awal.

Contoh 3: Prediktor-korektor AB4/AM3

Terapkan skema prediktor-korektor Adams orde empat pada $y' = -2y + t$, $y(0) = 1$ (solusi eksak $y = 1{,}25e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$) dengan $h = 0{,}1$. Nilai awal dari Runge-Kutta orde empat. Hitung w_4 dan w_5.

Penyelesaian.

Runge-Kutta orde empat memberi $w_0 = 1$, $w_1 = 0{,}823417$, $w_2 = 0{,}687905$, $w_3 = 0{,}586021$. Nilai f yang bersesuaian: $f_0 = -2{,}000000$, $f_1 = -1{,}546833$, $f_2 = -1{,}175811$, $f_3 = -0{,}872042$.

Langkah ke $t_4 = 0{,}4$. Prediktor:

$$w_4^{p} = 0{,}586021 + \tfrac{0{,}1}{24}[55(-0{,}872042) - 59(-1{,}175811) + 37(-1{,}546833) - 9(-2)] = 0{,}511761$$

$f(0{,}4;\, w_4^{p}) = -2(0{,}511761) + 0{,}4 = -0{,}623523$. Korektor:

$$w_4 = 0{,}586021 + \tfrac{0{,}1}{24}[9(-0{,}623523) + 19(-0{,}872042) - 5(-1{,}175811) + (-1{,}546833)] = 0{,}511653$$

Nilai eksak $y(0{,}4) = 0{,}511661$: galat prediktor $1{,}0\times10^{-4}$, galat korektor $8{,}0\times10^{-6}$. Dengan $f_4 = -2(0{,}511653) + 0{,}4 = -0{,}623306$, langkah ke $t_5 = 0{,}5$ menghasilkan prediktor $w_5^{p} = 0{,}459925$ dan korektor $w_5 = 0{,}459832$ (eksak $0{,}459849$, galat $1{,}7\times10^{-5}$). Koreksi memperkecil galat sekitar sepuluh kali lipat pada langkah pertama dan sekitar empat kali pada langkah kedua.

Kesalahan umum

• Menganggap metode banyak langkah dapat berjalan sendiri dari w_0. Metode m langkah memerlukan m nilai awal; memakai nilai awal berorde rendah (mis. Euler) merusak orde metode secara keseluruhan.

• Salah menyalin koefisien atau urutan indeks pada Adams-Bashforth (mis. memasangkan 55 dengan f_{i-1}). Koefisien harus berjumlah 24 pada rumus empat langkah ($55 - 59 + 37 - 9 = 24$); uji penjumlahan ini selalu.

• Menyamakan jumlah langkah dengan orde. Adams-Bashforth m langkah berorde m, sedangkan Adams-Moulton m langkah berorde $m+1$; yang berorde empat adalah Adams-Bashforth empat langkah dan Adams-Moulton tiga langkah.

• Mengira mengulang korektor berkali-kali meningkatkan orde. Iterasi hanya mendekati solusi persamaan implisit, yang tetap membawa galat pemotongan metode; untuk ketelitian lebih besar perkecil h.

• Mengubah h di tengah perhitungan tanpa menghitung ulang nilai awal. Rumus Adams mengasumsikan simpul berjarak sama.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa Adams-Moulton $m-1$ langkah lebih teliti daripada Adams-Bashforth m langkah padahal keduanya memakai jumlah nilai f lama yang sama? Apa yang berubah pada polinomial interpolasinya?
2. Pada metode satu langkah orde empat vs prediktor-korektor orde empat, bandingkan banyaknya evaluasi f per langkah. Dalam situasi apa f yang mahal membuat perbedaan ini menentukan?
3. Mengapa untuk $y' = e^{y}$ metode Adams-Moulton tidak dapat dipakai sebagai rumus langsung? Sebutkan dua cara mengatasinya dan bandingkan biayanya.
4. Apa yang hilang bila kita ingin mengubah ukuran langkah h di tengah perhitungan metode banyak langkah, dan mengapa metode satu langkah tidak mengalami masalah ini?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $y' = -y$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$, ambil $w_0 = 1$ dan $w_1 = e^{-0{,}1} = 0{,}904837$. Hitung w_2 dengan Adams-Bashforth dua langkah dan galatnya terhadap $e^{-0{,}2} = 0{,}818731$.

Kunci: $w_2 = w_1 + 0{,}05[3(-w_1) - (-w_0)] = 0{,}904837 + 0{,}05(-1{,}714512) = 0{,}819112$. Galat $\approx 3{,}8 \times 10^{-4}$.

2. Untuk masalah yang sama dan nilai awal yang sama, hitung w_2 dengan Adams-Moulton dua langkah (selesaikan persamaan linear untuk w_2). Bandingkan galatnya dengan soal sebelumnya.

Kunci: $w_2\left(1 + \frac{5h}{12}\right) = w_1 + \frac{h}{12}(-8w_1 + w_0)$, sehingga $w_2 = 0{,}818734$; galat $\approx 3{,}6 \times 10^{-6}$, sekitar seratus kali lebih kecil daripada Adams-Bashforth dua langkah.

3. Dengan $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{5}{12}$, turunkan Adams-Bashforth tiga langkah dari $w_{i+1} = w_i + h\left[\gamma_0 f_i + \gamma_1 \nabla f_i + \gamma_2 \nabla^2 f_i\right]$ dan periksa jumlah koefisiennya.

Kunci: Dengan $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ dan $\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$: koefisien f_i adalah $1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} = \frac{23}{12}$, f_{i-1} adalah $-\frac{1}{2} - \frac{10}{12} = -\frac{16}{12}$, f_{i-2} adalah $\frac{5}{12}$. Jadi $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$; jumlah koefisien $\frac{23-16+5}{12} = 1$ (konsisten).

4. Sebuah skema prediktor-korektor AB4/AM3 dijalankan untuk $N = 100$ langkah. Berapa banyak evaluasi f (abaikan tahap nilai awal) dibandingkan Runge-Kutta orde empat dengan $N = 100$?

Kunci: Prediktor-korektor: dua evaluasi per langkah, sekitar $2 \times 97 \approx 194$ evaluasi untuk langkah setelah tiga nilai awal (nilai awal sendiri memerlukan $3 \times 4 = 12$). Runge-Kutta orde empat: $4 \times 100 = 400$ evaluasi. Prediktor-korektor sekitar separuhnya.

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.7 Variable Step-Size Multistep Methods

Rujukan buku: halaman 315

Metode satu langkah seperti Runge-Kutta-Fehlberg (Seksi 5.5) mudah mengubah ukuran langkah: setiap langkah berdiri sendiri, sehingga h boleh diganti kapan saja. Metode banyak langkah (Seksi 5.6) berbeda. Rumus Adams memerlukan nilai-nilai $w_i, w_{i-1}, \ldots$ pada titik jala yang berjarak SAMA. Begitu h diganti, nilai-nilai lampau itu tidak lagi berada pada jala yang benar, dan kita harus membangun ulang beberapa nilai awal, biasanya dengan Runge-Kutta orde empat. Tetapi pengendalian galat otomatis tetap sangat diinginkan: tanpa itu kita memakai h kecil di seluruh selang hanya karena sebagian kecil selang yang sulit. Seksi ini memperlihatkan bahwa pasangan prediktor-korektor menyediakan penaksir galat secara gratis, dan bagaimana taksiran itu dipakai untuk mengatur h.

Kita ambil prediktor Adams-Bashforth empat langkah dan korektor Adams-Moulton tiga langkah. Keduanya berorde empat, dengan galat pemotongan lokal (didefinisikan sebagai $\tau = \frac{y(t_{i+1}) - w_{i+1}}{h}$, dengan anggapan semua nilai sebelumnya eksak)

$$\tau_{i+1}^{AB}(h) = \tfrac{251}{720}\, y^{(5)}(\hat{\mu}_i)\, h^4, \qquad \tau_{i+1}^{AM}(h) = -\tfrac{19}{720}\, y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)\, h^4.$$

Ide utamanya: kedua galat memuat turunan kelima yang sama, asalkan h kecil sehingga $y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$. Dengan anggapan ini, selisih prediktor dan korektor hanya bergantung pada $y^{(5)}$. Mengurangkan kedua rumus galat memberi

$$w_{i+1} - w_{i+1,\,p} \approx \tfrac{251+19}{720}\, y^{(5)} h^5 = \tfrac{3}{8}\, y^{(5)} h^5 \quad \Longrightarrow \quad y^{(5)} \approx \tfrac{8}{3h^5}\,(w_{i+1} - w_{i+1,\,p}).$$

Menyulihkan taksiran $y^{(5)}$ ke galat korektor menghasilkan penaksir yang dapat dihitung dari data yang sudah ada:

$$\sigma_{i+1} = \frac{19\,|w_{i+1} - w_{i+1,\,p}|}{270\,h} \approx |\tau_{i+1}^{AM}(h)|.$$

Setelah itu muncul pertanyaan: berapa langkah baru qh yang membuat galat lokal tidak melebihi toleransi ε? Karena galat berbanding lurus dengan pangkat empat langkah, galat pada langkah qh kira-kira $q^4\sigma_{i+1}$. Menuntut $q^4\sigma_{i+1} \le \varepsilon$ memberi $q \le (\varepsilon/\sigma_{i+1})^{1/4}$. Karena banyak pendekatan yang dibuat (kesamaan dua turunan kelima, suku galat berikutnya dibuang), pada praktiknya dipakai faktor pengaman: Algoritma 5.5 memakai $q = \left(\frac{\varepsilon}{2\sigma_{i+1}}\right)^{1/4}$, yaitu sekitar $0{,}84$ kali nilai batas.

Aturan keputusan: bila $\sigma_{i+1} \le \varepsilon$ hasil langkah diterima; bila $\sigma_{i+1} > \varepsilon$ langkah ditolak, h diganti qh (dengan q dibatasi dari bawah oleh $0{,}1$), nilai awal dihitung ulang dengan Runge-Kutta, dan langkah diulang. Karena mengubah h itu mahal (perlu tiga langkah Runge-Kutta, yakni sekitar dua belas evaluasi f), h hanya dinaikkan bila hasil jauh lebih teliti daripada yang diperlukan, yaitu $\sigma_{i+1} \le \varepsilon/10$, dan kenaikannya dibatasi $q \le 4$. Langkah juga dibatasi oleh $h_{\min} \le h \le h_{\max}$, dan di dekat ujung selang h disesuaikan supaya titik terakhir tepat di b. Bila h harus turun di bawah $h_{\min}$, algoritma berhenti dengan pesan kegagalan.

Kelebihan skema ini: biaya tambahan penaksir galat hampir nol (hanya sebuah selisih), dan h otomatis kecil pada bagian solusi yang berubah cepat serta besar pada bagian yang landai. Kekurangannya: penaksir bergantung pada anggapan $y^{(5)}(\hat{\mu}) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu})$ yang hanya sahih untuk h kecil (Contoh 3 memperlihatkan hal ini), dan setiap perubahan h menimbulkan biaya restart. Karena itu untuk soal yang ukuran langkah idealnya sering berubah, metode satu langkah seperti RKF kadang lebih praktis; untuk soal halus yang evaluasi f-nya mahal, metode banyak langkah dengan ukuran langkah variabel sangat efisien. Seksi ini menggabungkan Seksi 5.5 (gagasan pengendalian galat) dengan Seksi 5.6 (rumus Adams), dan Seksi 5.8 menyajikan alternatif lain, yaitu ekstrapolasi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Pasangan prediktor-korektor — Prediktor eksplisit (AB4) memberi tebakan $w_{i+1,\,p}$, korektor implisit (AM3) memperbaikinya. Dua hampiran per langkah inilah yang menyediakan penaksir galat tanpa evaluasi tambahan.

Penaksir galat σ — $\sigma = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1,p}|}{270h}$ menaksir galat pemotongan lokal korektor Adams-Moulton, diturunkan dengan menganggap $y^{(5)}$ sama pada kedua rumus galat.

Faktor perubahan langkah q — Langkah baru qh dipilih dari $q^4\sigma \approx \varepsilon$, dengan faktor pengaman: $q = (\mathrm{TOL}/(2\sigma))^{1/4}$. Karena galat $\propto h^4$, pangkat $\frac{1}{4}$ muncul.

Biaya restart — Metode banyak langkah butuh nilai awal berjarak sama, jadi setiap perubahan h memerlukan tiga langkah Runge-Kutta baru. Karena itu h jarang dinaikkan.

Zona tanpa perubahan — Bila $\mathrm{TOL}/10 < \sigma \le \mathrm{TOL}$, langkah diterima dan h dibiarkan; h naik hanya bila $\sigma \le \mathrm{TOL}/10$.

Pembatas langkah — $h_{\min} \le h \le h_{\max}$, $q \le 4$ saat menaikkan, $q \ge 0{,}1$ saat menurunkan, dan penyesuaian di ujung selang agar b menjadi titik jala.

Anggapan kunci — $y^{(5)}(\hat{\mu}_i) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu}_i)$. Keandalan seluruh pengendalian galat bergantung pada anggapan ini, yang sahih untuk h kecil.

Prediktor Adams-Bashforth empat langkah

$$w_{i+1,\,p} = w_i + \tfrac{h}{24}[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})]$$

Korektor Adams-Moulton tiga langkah

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{24}[9f(t_{i+1}, w_{i+1,\,p}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})]$$

Galat pemotongan lokal AB4 dan AM3

$$\tau^{AB} = \tfrac{251}{720}y^{(5)}(\hat{\mu})h^4$$

$$\tau^{AM} = -\tfrac{19}{720}y^{(5)}(\tilde{\mu})h^4$$

Penaksir galat

$$\sigma_{i+1} = \frac{19\,|w_{i+1} - w_{i+1,p}|}{270\,h}$$

Faktor perubahan langkah

$$q = \left(\frac{\mathrm{TOL}}{2\sigma_{i+1}}\right)^{1/4}, \qquad h_{\text{baru}} = qh$$

Algoritma: Prediktor-korektor Adams dengan langkah variabel

1. Masukkan a, b, α, TOL, $h_{\max}$, $h_{\min}$. Set $t_0 = a$, $w_0 = \alpha$, $h = h_{\max}$.
2. Hitung w_1, w_2, w_3 dengan RK4 memakai langkah h (nilai awal berjarak sama).
3. Hitung prediktor $w_{i+1,\,p}$ dengan AB4 dan korektor w_{i+1} dengan AM3, lalu $\sigma = \frac{19|w_{i+1} - w_{i+1,p}|}{270h}$.
4. Bila $\sigma \le \mathrm{TOL}$: terima w_{i+1} dan keluarkan hasilnya. Bila ujung b telah tercapai, berhenti.

5. Bila diterima dan ($\sigma \le 0{,}1\,\mathrm{TOL}$ atau langkah berikut akan melewati b): hitung $q = (\mathrm{TOL}/(2\sigma))^{1/4}$, ganti h dengan $\min(q, 4)\,h$, batasi dengan $h_{\max}$, sesuaikan agar b menjadi titik jala, lalu hitung nilai awal baru dengan RK4.
6. Bila $\sigma > \mathrm{TOL}$ (ditolak): hitung q yang sama, ganti h dengan $\max(q, 0{,}1)\,h$. Bila $h < h_{\min}$ berhenti dengan pesan kegagalan; bila tidak, hitung ulang nilai awal dengan RK4 dari titik terakhir yang diterima dan ulangi langkah.

Contoh 1: Satu langkah yang ditolak

Soal nilai awal $y' = t - 2y$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = 1$ (solusi $y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2t}$). Dengan $h = 0{,}2$, $\mathrm{TOL} = 10^{-4}$, hitung w_1, w_2, w_3 dengan RK4, lalu prediktor AB4 dan korektor AM3 untuk w_4 di $t = 0{,}8$, hitung σ, dan tentukan apakah langkah diterima.

Penyelesaian.

Nilai awal RK4: $w_0 = 1$, $w_1 = 0{,}688000$, $w_2 = 0{,}511795$, $w_3 = 0{,}426628$.

Prediktor: $w_{4,p} = w_3 + \frac{0{,}2}{24}[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0] = 0{,}404551$.

Korektor: $w_4 = w_3 + \frac{0{,}2}{24}[9f(0{,}8, w_{4,p}) + 19f_3 - 5f_2 + f_1] = 0{,}402029$.

Penaksir galat:

$$\sigma = \frac{19\,|w_4 - w_{4,p}|}{270\,(0{,}2)} = \frac{19\,(2{,}522 \times 10^{-3})}{54} = 8{,}87 \times 10^{-4}.$$

Karena $\sigma > \mathrm{TOL} = 10^{-4}$, langkah DITOLAK. Faktor pengubah langkah $q = \left(\frac{10^{-4}}{2\sigma}\right)^{1/4} = 0{,}4872$, sehingga langkah baru $qh \approx 0{,}0974$. Nilai-nilai awal harus dihitung ulang dengan langkah baru ini.

Contoh 2: Mengulang dengan langkah baru dan aturan penyesuaian

Lanjutkan Contoh 1: ulangi dengan $h = 0{,}1$ (pembulatan dari $0{,}0974$ yang diusulkan), lalu tentukan tindakan terhadap h untuk beberapa nilai σ lain bila $\mathrm{TOL} = 10^{-4}$.

Penyelesaian.

Dengan $h = 0{,}1$: $w_3 = 0{,}586021$, $w_{4,p} = 0{,}511761$, $w_4 = 0{,}511653$ di $t = 0{,}4$ (nilai eksak $0{,}511661$). Maka $\sigma = 7{,}61 \times 10^{-5}$, sehingga $\sigma < 10^{-4}$ dan langkah diterima. Karena σ tidak lebih kecil dari $\mathrm{TOL}/10 = 10^{-5}$, h TIDAK dinaikkan (biaya restart tidak sepadan). Galat sebenarnya $|y - w_4| = 8{,}02 \times 10^{-6}$.

Aturan untuk σ lain (dengan $q = \left(\frac{\mathrm{TOL}}{2\sigma}\right)^{1/4}$):

$\sigma = 5 \times 10^{-6}$ ($\le \mathrm{TOL}/10$): diterima dan h dinaikkan dengan $q = 1{,}78$.

$\sigma = 5 \times 10^{-5}$ (di antara $\mathrm{TOL}/10$ dan TOL): diterima, h tetap.

$\sigma = 3 \times 10^{-4}$ ($> \mathrm{TOL}$): ditolak, h diganti qh dengan $q = 0{,}639$.

Contoh 3: Seberapa baik penaksir galat σ?

Untuk soal yang sama, ambil nilai awal EKSAK $y(t_0), \ldots, y(t_3)$ pada beberapa h, hitung σ di $t_4 = 4h$, lalu bandingkan dengan galat lokal sebenarnya korektor $|y(t_4) - w_4|/h$ dan prediktor $|y(t_4) - w_{4,p}|/h$.

Penyelesaian.

Hasil perhitungan:

$h = 0{,}200$: $\sigma = 8{,}90 \times 10^{-4}$, galat korektor $2{,}15 \times 10^{-3}$, galat prediktor $1{,}05 \times 10^{-2}$.

$h = 0{,}100$: $\sigma = 7{,}62 \times 10^{-5}$, galat korektor $1{,}33 \times 10^{-4}$, galat prediktor $9{,}51 \times 10^{-4}$.

$h = 0{,}050$: $\sigma = 5{,}60 \times 10^{-6}$, galat korektor $7{,}73 \times 10^{-6}$, galat prediktor $7{,}18 \times 10^{-5}$.

$h = 0{,}025$: $\sigma = 3{,}80 \times 10^{-7}$, galat korektor $4{,}53 \times 10^{-7}$, galat prediktor $4{,}94 \times 10^{-6}$.

Perbandingan galat korektor terhadap σ adalah $2{,}42$, $1{,}74$, $1{,}38$, $1{,}19$ untuk h yang makin kecil: menuju 1. Jadi penaksir hanya akurat bila h cukup kecil, dan pada $h = 0{,}2$ ia menaksir terlalu rendah dengan faktor lebih dari dua (ini alasan faktor pengaman). Perhatikan juga bahwa galat prediktor jauh lebih besar daripada galat korektor (perbandingan mendekati $251/19 \approx 13{,}2$ untuk $h \to 0$), sesuai teori.

Kesalahan umum

• Menaikkan h pada setiap langkah yang diterima. Setiap perubahan langkah memerlukan restart RK4, sehingga kenaikan hanya layak bila $\sigma \le \mathrm{TOL}/10$.

• Lupa bahwa nilai-nilai lampau harus berjarak sama: setelah mengganti h, memakai w_{i-1}, w_{i-2} yang lama dalam rumus Adams menghasilkan hasil yang salah.

• Menggunakan σ sebagai galat global. σ menaksir galat PEMOTONGAN LOKAL per satuan langkah, bukan galat akumulasi sepanjang selang.

• Mempercayai σ pada h besar. Anggapan $y^{(5)}(\hat{\mu}) \approx y^{(5)}(\tilde{\mu})$ baru baik untuk h kecil; pada h besar σ dapat menaksir terlalu rendah.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa faktor pengaman $\frac{1}{2}$ dalam $q = (\mathrm{TOL}/(2\sigma))^{1/4}$ dipakai? Apa risikonya bila dihilangkan?
2. Bandingkan biaya mengubah langkah pada RKF (Seksi 5.5) dan pada prediktor-korektor ini. Dalam situasi apa metode banyak langkah tetap lebih efisien?
3. Mengapa penaksir σ dapat dihitung tanpa mengetahui $y^{(5)}$? Bagian mana dari argumen yang memerlukan $h \to 0$?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Pada suatu langkah dengan $h = 0{,}1$ diperoleh $|w_{i+1} - w_{i+1,\,p}| = 3{,}411 \times 10^{-5}$. Hitung σ. Bila $\mathrm{TOL} = 10^{-5}$, apakah langkah diterima, dan berapa h baru?

Kunci: $\sigma = \frac{19\,(3{,}411 \times 10^{-5})}{270(0{,}1)} = 2{,}40 \times 10^{-5} > 10^{-5}$, jadi ditolak. $q = \left(\frac{10^{-5}}{2\sigma}\right)^{1/4} = 0{,}676$ dan $h_{\text{baru}} \approx 0{,}0676$.

2. Jika $\sigma = 4 \times 10^{-8}$, $\mathrm{TOL} = 10^{-6}$, dan $h = 0{,}05$, apa tindakannya dan berapa h baru (sebelum dibatasi $h_{\max}$)?

Kunci: $\sigma = 4 \times 10^{-8} \le \mathrm{TOL}/10 = 10^{-7}$, jadi diterima dan h dinaikkan.
$q = \left(\frac{10^{-6}}{8 \times 10^{-8}}\right)^{1/4} = (12{,}5)^{1/4} = 1{,}880$ dan $h_{\text{baru}} = 0{,}0940$ (di bawah batas $4h = 0{,}2$).

3. Mengapa perbandingan galat lokal prediktor terhadap korektor mendekati $\frac{251}{19}$ untuk $h \to 0$?

Kunci: Kedua galat berbentuk konstanta kali $y^{(5)}h^{\,4}$ dengan konstanta $\frac{251}{720}$ dan $-\frac{19}{720}$, dan $y^{(5)}$ keduanya menuju nilai yang sama saat $h \to 0$. Perbandingan mutlaknya $\frac{251}{19} \approx 13{,}2$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.8 Extrapolation Methods

Rujukan buku: halaman 321

Seksi 4.5 menunjukkan bahwa kaidah trapesium yang kasar dapat diubah menjadi hampiran yang sangat teliti lewat ekstrapolasi Richardson, asalkan galatnya mempunyai ekspansi dalam pangkat h tertentu. Seksi ini menerapkan gagasan itu pada masalah nilai awal $y' = f(t, y)$, $y(a) = \alpha$. Metode Euler sendiri tidak cocok karena galatnya memuat semua pangkat h, tetapi ada rumus dasar yang galatnya hanya memuat pangkat genap, yaitu metode titik tengah (midpoint) dengan awal Euler dan koreksi di titik akhir, yang dikenal sebagai metode Gragg atau metode titik tengah termodifikasi.

Untuk menghampiri $y(t + H)$ dari nilai $w_0 = y(t)$ dengan q subselang (dengan q genap) dan $h = H/q$, kita pakai tiga tahap. Pertama, satu langkah Euler: $w_1 = w_0 + hf(t, w_0)$. Kedua, metode titik tengah $w_{j+1} = w_{j-1} + 2hf(t_j, w_j)$ untuk $j = 1, \ldots, q-1$. Ketiga, koreksi titik akhir (penghalusan) yang merata-ratakan dua nilai terakhir:

$$y = \tfrac{1}{2}[w_q + w_{q-1} + hf(t + H, w_q)].$$

Hasilnya, yang kita tulis $w(t + H, h)$, memenuhi ekspansi galat $y(t + H) = w(t + H, h) + \sum_{k \geq 1} \delta_k h^{2k}$ dengan konstanta δ_k yang tidak bergantung pada h (hasil Gragg). Bagian penghalus penting: metode titik tengah murni mempunyai akar parasit yang tidak stabil (lihat Seksi 5.10), dan koreksi titik akhir meredam osilasi itu sekaligus menjaga ekspansi galat berpangkat genap.

Karena ekspansi hanya memuat $h^2, h^4, \ldots$, ekstrapolasi sangat efektif. Dengan beberapa nilai $q_1 < q_2 < \cdots$ kita hitung kolom pertama tabel $y_{k,1} = w(t + H, H/q_k)$. Lalu kolom-kolom berikutnya menghilangkan suku galat satu per satu:

$$y_{k,j} = y_{k,j-1} + \frac{y_{k,j-1} - y_{k-1,j-1}}{(q_k/q_{k-j+1})^2 - 1}.$$

Kolom ke-j menghilangkan suku $h^2, \ldots, h^{2j-2}$ sehingga galat $y_{k,j}$ berorde $O(h^{2j})$. Rumus ini sama dengan skema Romberg, hanya saja barisan pembagi tidak $1, 2, 4, 8, \ldots$. Barisan $q = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32$ dipilih karena menaikkan jumlah evaluasi f secara lambat: satu hampiran dengan q subselang memerlukan $q + 1$ evaluasi, dan pembagian ganda seperti $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ akan menggandakan biaya setiap baris. Pada barisan di atas, kecuali rasio pertama (2), rasio dua suku berurutan hanya $\frac{3}{2}$ atau $\frac{4}{3}$ sehingga lebih hemat.

Algoritma 5.6 menetapkan langkah dasar h (mulai dari $h_{\max}$) dan menambah baris tabel sampai $|y_{k,k} - y_{k-1,k-1}| < \mathrm{TOL}$. Bila syarat belum terpenuhi sampai $k = 8$, langkah dasar dipotong dua dan semuanya dihitung ulang. Bila hasil diterima, w diganti $y_{k,k}$, kita maju ke $t + h$, dan h boleh digandakan jika tabel hanya memerlukan $k \leq 3$ baris, yang berarti langkah masih terlalu konservatif. h dibatasi $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$, dan langkah terakhir dipotong supaya tepat sampai b.

Kelebihan: ketelitian tinggi dengan banyak evaluasi yang terkendali, pengendalian galat sekaligus pengaturan orde otomatis (jumlah kolom tabel yang dipakai), dan setiap langkah dasar berdiri sendiri sehingga mengubah h murah (tanpa restart seperti Seksi 5.7). Kekurangan: untuk satu langkah dasar diperlukan puluhan evaluasi f dan metodenya mensyaratkan solusi yang cukup mulus (ekspansi galat menuntut turunan tinggi yang terbatas). Selain itu, metode ini tidak cocok untuk persamaan kaku (Seksi 5.11). Variasi yang lebih lanjut ialah metode Bulirsch-Stoer yang memakai ekstrapolasi rasional alih-alih polinom. Seksi ini berkaitan erat dengan Seksi 4.5 (Romberg) dan menutup pembahasan metode eksplisit untuk soal nilai awal tak kaku sebelum Seksi 5.9.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Metode titik tengah termodifikasi (Gragg) — Euler untuk langkah pertama, titik tengah $w_{j+1} = w_{j-1} + 2hf(t_j, w_j)$ untuk langkah-langkah berikutnya, lalu koreksi titik akhir. Hasilnya mempunyai ekspansi galat dalam $h^2, h^4, \ldots$.

Koreksi titik akhir — $\frac{1}{2}[w_q + w_{q-1} + hf(t+H, w_q)]$ meredam akar parasit metode titik tengah dan menjamin ekspansi galat berpangkat genap.

Ekspansi galat berpangkat genap — $y(t) = w(t,h) + \sum_{k\geq 1} \delta_k h^{2k}$ dengan δ_k bebas dari h. Inilah syarat agar ekstrapolasi Richardson berjalan.

Tabel ekstrapolasi — $y_{k,j} = y_{k,j-1} + \frac{y_{k,j-1} - y_{k-1,j-1}}{(q_k/q_{k-j+1})^2 - 1}$. Kolom ke-$j$ berorde $O(h^{2j})$.

Barisan subselang q — $2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32$ dipilih untuk meminimalkan evaluasi f (biaya $q+1$ per hampiran), alih-alih $1, 2, 4, 8, \ldots$ pada Romberg.

Pengendalian galat — Baris ditambah sampai $|y_{k,k} - y_{k-1,k-1}| < \mathrm{TOL}$; bila sampai $k = 8$ gagal, langkah dasar h dibagi dua.

Orde adaptif — Banyaknya kolom tabel yang dipakai menentukan orde ($2k$) secara otomatis menurut kesulitan soal.

Metode titik tengah

$$w_{j+1} = w_{j-1} + 2hf(t_j, w_j), \qquad w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0)$$

Koreksi titik akhir

$$y_{k,1} = \tfrac{1}{2}[w_q + w_{q-1} + hf(t+H, w_q)], \quad h = \tfrac{H}{q}$$

Ekspansi galat

$$y(t) = w(t,h) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k\, h^{2k}$$

Ekstrapolasi

$$y_{k,j} = y_{k,j-1} + \frac{y_{k,j-1} - y_{k-1,j-1}}{(q_k/q_{k-j+1})^2 - 1}$$

Barisan subselang

$$q = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 24,\ 32$$

Algoritma: Ekstrapolasi untuk masalah nilai awal

1. Masukkan $a, b, \alpha, \mathrm{TOL}, h_{\max}, h_{\min}$ dan barisan $q = (2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32)$. Set $t = a$, $w = \alpha$, $h = h_{\max}$.
2. Untuk $k = 1, 2, \ldots, 8$: dengan $h_k = h/q_k$, lakukan satu langkah Euler, $q_k - 1$ langkah titik tengah, lalu koreksi titik akhir untuk memperoleh $y_{k,1}$.
3. Untuk $k \geq 2$, hitung baris ke-k tabel: $y_{k,j} = y_{k,j-1} + \frac{y_{k,j-1} - y_{k-1,j-1}}{(q_k/q_{k-j+1})^2 - 1}$, $j = 2, \ldots, k$.
4. Bila $|y_{k,k} - y_{k-1,k-1}| \leq \mathrm{TOL}$ terima $w = y_{k,k}$, set $t = t + h$ dan keluarkan hasilnya. Bila tidak, tambah k.

5. Bila sampai $k = 8$ tidak tercapai, ganti h dengan $h/2$; bila $h < h_{\min}$ berhenti dengan pesan kegagalan.
6. Setelah penerimaan: bila $t \geq b$ selesai; bila $t + h > b$ set $h = b - t$; bila $k \leq 3$ dan $h < h_{\max}/2$ gandakan h. Ulangi dari langkah 2.

Contoh 1: Satu langkah ekstrapolasi untuk $y' = t - y$

Untuk $y' = t - y$, $y(0) = 1$ (solusi $y = t - 1 + 2e^{-t}$), hampiri $y(0{,}4)$ dengan langkah dasar $H = 0{,}4$ dan $q = 2, 4, 6$. Hitung $y_{1,1}$ secara rinci, lalu seluruh tabel.

Penyelesaian.

Untuk $q = 2$: $h_0 = 0{,}2$. $w_1 = 1 + 0{,}2 f(0, 1) = 0{,}8000$; $w_2 = 1 + 0{,}4 f(0{,}2, w_1) = 0{,}7600$; koreksi titik akhir:

$$y_{1,1} = \tfrac{1}{2}[w_2 + w_1 + 0{,}2 f(0{,}4, w_2)] = 0{,}7440.$$

Dengan cara sama untuk $q = 4$ dan $q = 6$ diperoleh kolom pertama. Rumus ekstrapolasi memakai pembagi $\left(\frac{q_k}{q_{k-j+1}}\right)^2 - 1$:

$$y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{y_{2,1} - y_{1,1}}{(4/2)^2 - 1} = y_{2,1} + \frac{y_{2,1} - y_{1,1}}{3},$$

$$y_{3,2} = y_{3,1} + \frac{y_{3,1} - y_{2,1}}{(6/4)^2 - 1} = y_{3,1} + \frac{y_{3,1} - y_{2,1}}{1{,}25},$$

$$y_{3,3} = y_{3,2} + \frac{y_{3,2} - y_{2,2}}{(6/2)^2 - 1} = y_{3,2} + \frac{y_{3,2} - y_{2,2}}{8}.$$

Tabel hasilnya:

$y_{1,1} = 0{,}74400000$

$y_{2,1} = 0{,}74152000$, $y_{2,2} = 0{,}74069333$

$y_{3,1} = 0{,}74103457$, $y_{3,2} = 0{,}74064622$, $y_{3,3} = 0{,}74064033$

Nilai eksak $y(0{,}4) = 0{,}74064009$. Galat: $y_{1,1}$ sebesar $3{,}36 \times 10^{-3}$, $y_{2,2}$ sebesar $5{,}32 \times 10^{-5}$, $y_{3,3}$ sebesar $2{,}40 \times 10^{-7}$. Setiap kolom memperbaiki ketelitian secara drastis.

Contoh 2: Biaya dan ketelitian pada seluruh selang [0, 2]

Untuk soal yang sama, integrasikan ke $t = 2$ dengan langkah dasar $H = 0{,}4$ (lima langkah) memakai $q = (2, 4)$, $(2, 4, 6)$, dan $(2, 4, 6, 8)$. Hitung jumlah evaluasi f per langkah dasar dan galat akhir di $t = 2$, lalu bandingkan dengan RK4 yang memakai jumlah evaluasi yang kira-kira sama.

Penyelesaian.

Satu hampiran dengan q subselang memerlukan $q + 1$ evaluasi f. Jadi per langkah dasar: $q = (2, 4)$ memerlukan $3 + 5 = 8$, $(2, 4, 6)$ memerlukan 15, $(2, 4, 6, 8)$ memerlukan 24 evaluasi.

Nilai eksak $y(2) = 1{,}27067057$. Galat di $t = 2$ setelah lima langkah dasar:

$(2, 4)$: $5{,}38 \times 10^{-5}$ ($8 \cdot 5 = 40$ evaluasi);

$(2, 4, 6)$: $2{,}42 \times 10^{-7}$ (75 evaluasi);

$(2, 4, 6, 8)$: $5{,}82 \times 10^{-10}$ (120 evaluasi).

Sebagai pembanding, RK4 dengan 18 langkah (sekitar 72 evaluasi, sebanding dengan kasus $(2, 4, 6)$) memberi galat $7{,}54 \times 10^{-7}$, jauh lebih besar daripada $2{,}42 \times 10^{-7}$. Tiap tambahan kolom menurunkan galat sekitar dua sampai tiga orde besaran.

Contoh 3: Memeriksa hukum galat h^2

Untuk $y' = t - y$, $y(0) = 1$, hitung galat $y(0{,}4) - w(0{,}4, h)$ dari metode Gragg dengan $q = 2, 4, 8, 16$ ($h = 0{,}4/q$) dan periksa bahwa galat berkurang kira-kira empat kali setiap h dibagi dua.

Penyelesaian.

Galat: $q = 2$: $-3{,}36 \times 10^{-3}$; $q = 4$: $-8{,}80 \times 10^{-4}$; $q = 8$: $-2{,}23 \times 10^{-4}$; $q = 16$: $-5{,}58 \times 10^{-5}$.

Perbandingan galat berturutan: $3{,}82$, $3{,}95$, $3{,}99$, menuju $4 = 2^2$. Ini sesuai ekspansi $y - w = \delta_1 h^2 + \delta_2 h^4 + \cdots$: suku $\delta_1 h^2$ mendominasi untuk h kecil, dan inilah suku yang dihilangkan ekstrapolasi pada kolom kedua.

Kesalahan umum

• Memakai banyak subselang q ganjil. Ekspansi galat berpangkat genap hanya sahih untuk q genap pada metode Gragg.

• Menyamakan tabel ini dengan Romberg secara harfiah (membagi dua h setiap baris). Rumus pembagi $(q_k/q_{k-j+1})^2 - 1$ harus dipakai menurut barisan q yang sebenarnya, bukan selalu $4^j - 1$.

• Menghilangkan koreksi titik akhir dan memakai metode titik tengah murni. Akar parasit -1 membuat osilasi dan ekspansi galat tidak lagi rapi.

• Memakai metode ini untuk persamaan kaku atau solusi tak mulus. Ekspansi galat berpangkat genap menuntut keteraturan (turunan tinggi terbatas) dan stabilitas absolut yang memadai.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa ekstrapolasi tidak berhasil bila diterapkan langsung pada metode Euler? Apa sifat galat yang diperlukan?
2. Apa peran koreksi titik akhir? Apa yang terjadi bila dihilangkan?
3. Bandingkan menaikkan ketelitian dengan menambah kolom tabel ekstrapolasi versus mengecilkan h pada Runge-Kutta. Dalam situasi apa yang pertama lebih unggul?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $y' = -2y$, $y(0) = 1$, hitung $y_{1,1}$, $y_{2,1}$, dan $y_{2,2}$ untuk menghampiri $y(0{,}2)$ dengan $H = 0{,}2$, $q = 2, 4$.

Kunci: $y_{1,1} = 0{,}672000$, $y_{2,1} = 0{,}670760$, $y_{2,2} = y_{2,1} + \frac{y_{2,1} - y_{1,1}}{3} = 0{,}670347$. Nilai eksak $e^{-0{,}4} = 0{,}670320$.

2. Hitung total evaluasi f untuk delapan baris tabel dengan barisan $q = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32$ (satu hampiran dengan q subselang memerlukan $q + 1$ evaluasi), lalu bandingkan dengan barisan penggandaan $q = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$.

Kunci: Barisan Algoritma 5.6: $(2 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 + 32) + 8 = 112$ evaluasi. Barisan penggandaan: $(2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256) + 8 = 518$ evaluasi, jadi jauh lebih mahal untuk jumlah kolom (orde) yang sama.

3. Berorde berapa galat $y_{4,4}$, dan mengapa banyak subselang q harus genap pada metode Gragg?

Kunci: Orde $2k = 8$ untuk $y_{4,4}$. Ekspansi galat hanya berpangkat genap ($h^2, h^4, \ldots$) bila banyak subselang genap; dengan q ganjil muncul suku pangkat ganjil sehingga ekstrapolasi h^2 tidak lagi menghilangkan suku galat secara bersih.

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.9 Higher-Order Equations and Systems of Differential Equations

Rujukan buku: halaman 328

Banyak persoalan fisika dan teknik berbentuk SISTEM persamaan diferensial, misalnya gerak beberapa benda, rangkaian listrik, atau populasi yang saling berinteraksi, dan banyak lainnya berbentuk persamaan orde tinggi seperti $y'' = f(t, y, y')$ untuk gerak pegas atau pendulum. Kabar baiknya, hampir semua teknik pada seksi-seksi sebelumnya (Euler, Taylor, Runge-Kutta, multilangkah, ekstrapolasi) dapat diperluas ke sistem dengan mengganti besaran skalar menjadi vektor. Dan persamaan orde tinggi dapat diubah menjadi sistem orde pertama, sehingga satu perangkat metode cukup.

Sistem m persamaan orde pertama berbentuk $u_i' = f_i(t, u_1, \ldots, u_m)$ untuk $a \le t \le b$ dengan syarat awal $u_i(a) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$. Dalam notasi vektor $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$, $\mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\alpha}$ dengan $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$. Keberadaan dan ketunggalan solusi dijamin bila f_i kontinu pada $D = \{(t, u_1, \ldots, u_m) \mid a \le t \le b,\ u_i \in \mathbb{R}\}$ dan memenuhi syarat Lipschitz dalam variabel $u_1, \ldots, u_m$ (dengan norma jumlah):

$$|f(t, u_1, \ldots, u_m) - f(t, z_1, \ldots, z_m)| \le L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j|.$$

Syarat ini terpenuhi bila turunan parsial $\partial f / \partial u_j$ kontinu dan terbatas oleh L pada D (lewat teorema nilai rata-rata), dan soalnya juga berkondisi baik terhadap perubahan kecil data awal.

Sekarang persamaan orde m: $y^{(m)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$ dengan syarat awal $y(a) = \alpha_1$, $y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$. Dengan substitusi $u_1 = y$, $u_2 = y'$, ..., $u_m = y^{(m-1)}$ kita peroleh sistem

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = u_3, \quad \ldots, \quad u_{m-1}' = u_m, \quad u_m' = f(t, u_1, \ldots, u_m),$$

dengan $u_j(a) = \alpha_j$. Jadi persamaan tunggal orde m ekuivalen dengan sistem berdimensi m, dan solusi y adalah komponen pertama u_1. Bila sistem tidak otonom (bergantung eksplisit pada t), variabel t sendiri dapat dijadikan satu komponen baru dengan $u_0' = 1$ sehingga sistem menjadi otonom, bila diinginkan.

Metode numeriknya diperluas komponen demi komponen. Metode Euler menjadi $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + h\,\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i)$. Untuk Runge-Kutta orde empat dihitung vektor $\mathbf{k}_1 = h\,\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i)$, $\mathbf{k}_2 = h\,\mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{w}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$, $\mathbf{k}_3 = h\,\mathbf{f}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{w}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$, $\mathbf{k}_4 = h\,\mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{w}_i + \mathbf{k}_3)$, lalu $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$. Kuncinya: semua komponen $\mathbf{k}_j$ dihitung dari nilai tahap YANG SAMA dan baru setelah itu semua komponen $\mathbf{w}$ diperbarui bersama-sama; memperbarui komponen satu per satu (memakai komponen yang sudah baru untuk menghitung komponen lain) mengubah metode dan merusak ordenya. Orde metode tidak berubah dari kasus skalar, dan galat diukur dengan norma vektor.

Beberapa catatan praktis. Pertama, metode multilangkah, Runge-Kutta-Fehlberg, dan ekstrapolasi semuanya bekerja pada vektor dengan pengendalian galat berdasarkan norma (mis. nilai maksimum antar komponen). Kedua, bila komponen-komponen solusi berubah dengan laju yang sangat berbeda, langkah h ditentukan oleh komponen tercepat; ini awal dari fenomena kekakuan (Seksi 5.11). Ketiga, hasil keluaran u_1 adalah y, sedangkan $u_2, \ldots$ adalah turunan-turunannya, yang diperoleh gratis dan dengan ketelitian sebanding. Seksi ini menjadi jembatan ke masalah nilai batas orde dua pada Bab 11 dan ke analisis stabilitas sistem pada seksi berikutnya.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Sistem orde pertama — $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ dengan $\mathbf{u}(a) = \boldsymbol{\alpha}$: m persamaan yang saling terkait dengan m syarat awal.

Syarat Lipschitz multivariabel — $|f(t, \mathbf{u}) - f(t, \mathbf{z})| \leq L \sum_j |u_j - z_j|$. Menjamin solusi tunggal bersama dengan kekontinuan f_i pada D.

Reduksi orde — $y^{(m)} = f(t, y, \ldots, y^{(m-1)})$ menjadi sistem dengan $u_j = y^{(j-1)}$, $u_j' = u_{j+1}$, $u_m' = f$.

Perluasan metode ke vektor — Euler, Taylor, Runge-Kutta, multilangkah semuanya dipakai dengan menggantikan skalar oleh vektor; orde metode tetap sama.

Pembaruan serentak — Semua komponen tahap $\mathbf{k}_j$ dihitung dari nilai yang sama, lalu semua komponen $\mathbf{w}$ diperbarui bersama. Pembaruan berurutan komponen merusak metode.

Syarat awal berjumlah m — Persamaan orde m memerlukan m syarat awal $y(a), y'(a), \ldots, y^{(m-1)}(a)$, yang menjadi nilai awal komponen sistem.

Pengendalian galat pada sistem — Galat diukur dengan norma vektor; langkah ditentukan oleh komponen yang paling cepat berubah.

Sistem orde pertama

$$u_i' = f_i(t, u_1, \ldots, u_m), \quad u_i(a) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

Syarat Lipschitz untuk sistem

$$|f(t, u_1, \ldots, u_m) - f(t, z_1, \ldots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^{m} |u_j - z_j|$$

Reduksi persamaan orde m

$$u_j = y^{(j-1)}, \quad u_j' = u_{j+1} \ (j < m), \quad u_m' = f(t, u_1, \ldots, u_m)$$

Euler vektor

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + h\,\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i)$$

Runge-Kutta orde empat vektor

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i), \ \mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(t_i + \tfrac{h}{2}, \mathbf{w}_i + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_1)$$

$$\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(t_i + \tfrac{h}{2}, \mathbf{w}_i + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_2), \ \mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{w}_i + \mathbf{k}_3)$$

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Algoritma: Runge-Kutta orde empat untuk sistem

1. Masukkan a, b, jumlah subselang N, dimensi m, dan syarat awal $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Bila soal berupa persamaan orde m, ubah dahulu menjadi sistem dengan $u_j = y^{(j-1)}$.
2. Set $h = (b - a)/N$, $t = a$, $\mathbf{w} = \boldsymbol{\alpha}$ dan keluarkan $(t, \mathbf{w})$.
3. Untuk $i = 1, \ldots, N$: hitung vektor $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(t, \mathbf{w})$ untuk semua komponen.

4. Hitung $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(t + \frac{h}{2}, \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$ dan $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(t + \frac{h}{2}, \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$, lalu $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(t + h, \mathbf{w} + \mathbf{k}_3)$, semuanya untuk setiap komponen dari nilai tahap yang sama.
5. Perbarui SEMUA komponen sekaligus: $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ dan $t = a + ih$.
6. Keluarkan $(t, \mathbf{w})$. Bila persamaan awal berorde tinggi, $y \approx w_1$ dan $y^{(j-1)} \approx w_j$.

Contoh 1: Persamaan orde dua dengan RK4

Selesaikan $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (solusi eksak $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$) dengan RK4 berlangkah $h = 0{,}1$. Tuliskan sebagai sistem, kerjakan langkah pertama secara rinci, lalu bandingkan hasil di $t = 1$ setelah sepuluh langkah dengan Euler.

Penyelesaian.

Ambil $u_1 = y$, $u_2 = y'$: $u_1' = u_2$, $u_2' = -3u_2 - 2u_1$, dengan $\mathbf{u}(0) = (1,\ 0)$.

Langkah 1 ($t = 0$): $\mathbf{k}_1 = 0{,}1\,(0,\ -2) = (0{,}0000,\ -0{,}2000)$.

$\mathbf{k}_2 = 0{,}1\,\mathbf{f}(0{,}05,\ (1,\ -0{,}1)) = (-0{,}0100,\ -0{,}1700)$.

$\mathbf{k}_3 = 0{,}1\,\mathbf{f}(0{,}05,\ (0{,}9950,\ -0{,}0850)) = (-0{,}00850,\ -0{,}17350)$.

$\mathbf{k}_4 = 0{,}1\,\mathbf{f}(0{,}1,\ (0{,}99150,\ -0{,}17350)) = (-0{,}01735,\ -0{,}14625)$.

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) = (0{,}990942,\ -0{,}172208)$.

Pembanding eksak: $y(0{,}1) = 0{,}990944$, $y'(0{,}1) = -0{,}172213$. Langkah kedua memberi $y(0{,}2) \approx 0{,}967138$ (eksak $0{,}967141$). Setelah sepuluh langkah, $w = 0{,}600420$ di $t = 1$, dengan eksak $0{,}600424$ sehingga galat RK4 sekitar $3{,}60 \times 10^{-6}$, sedangkan Euler memberi $0{,}589983$ dengan galat $1{,}04 \times 10^{-2}$ (ribuan kali lebih besar).

Contoh 2: Sistem dua komponen dengan Euler (model mangsa-pemangsa)

Sistem $x' = x(1 - \frac{y}{2})$, $y' = y(\frac{x}{4} - 1)$ dengan $x(0) = 2$, $y(0) = 1$. Hitung dua langkah Euler dengan $h = 0{,}1$.

Penyelesaian.

Langkah 1: $x'(0) = 2(1 - 0{,}5) = 1$ dan $y'(0) = 1(0{,}5 - 1) = -0{,}5$. Maka $x_1 = 2 + 0{,}1(1) = 2{,}1000$, $y_1 = 1 + 0{,}1(-0{,}5) = 0{,}9500$.

Langkah 2 (kedua komponen memakai (x_1, y_1) yang LAMA): $x' = 1{,}10250$, $y' = -0{,}45125$. Maka $x_2 = 2{,}210250$, $y_2 = 0{,}904875$.

Hampiran: $x(0{,}2) \approx 2{,}210250$, $y(0{,}2) \approx 0{,}904875$. Karena $x < 4$, populasi pemangsa y menurun dan mangsa x naik.

Contoh 3: Persamaan orde tiga diubah menjadi sistem

Ubah $y''' = ty - y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$ menjadi sistem orde pertama dan lakukan dua langkah Euler dengan $h = 0{,}1$.

Penyelesaian.

Ambil $u_1 = y$, $u_2 = y'$, $u_3 = y''$:

$u_1' = u_2$

$u_2' = u_3$

$u_3' = t u_1 - u_2,$

dengan $\mathbf{u}(0) = (1,\ 0,\ 2)$.

Langkah 1 ($t = 0$): $\mathbf{f} = (0,\ 2,\ 0)$, sehingga
$\mathbf{u}_1 = (1 + 0,\ \ 0 + 0{,}2,\ \ 2 + 0) = (1{,}0000,\ 0{,}2000,\ 2{,}0000)$.

Langkah 2 ($t = 0{,}1$): $\mathbf{f} = (0{,}2,\ \ 2,\ \ 0{,}1 \cdot 1 - 0{,}2) = (0{,}2,\ 2,\ \ -0{,}1)$, sehingga
$\mathbf{u}_2 = (1{,}0200,\ 0{,}4000,\ 1{,}9900)$.

Jadi $y(0{,}2) \approx 1{,}0200$, $y'(0{,}2) \approx 0{,}4000$, $y''(0{,}2) \approx 1{,}9900$.

Kesalahan umum

• Memperbarui komponen satu per satu dalam satu langkah (memakai w_1 baru untuk menghitung w_2), padahal rumus mengharuskan semua komponen memakai nilai langkah sebelumnya.

• Lupa mengubah syarat awal: persamaan orde m memerlukan m syarat awal, termasuk $y'(a),\ \ldots,\ y^{(m-1)}(a)$ untuk komponen sistem.

• Menganggap sistem hanya memerlukan h sesuai komponen yang lambat. Langkah harus cukup kecil untuk komponen yang paling cepat berubah (dan untuk stabilitas).

• Salah menurunkan persamaan komponen terakhir: $u_m' = f(t, u_1,\ \ldots,\ u_m)$ harus ditulis dalam variabel baru, bukan memakai $y, y',\ \ldots$ yang tersisa.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa urutan perhitungan $\mathbf{k}_j$ harus memakai satu vektor tahap yang sama untuk semua komponen? Apa yang berubah jika tidak?
2. Bagaimana Anda mengubah sistem dua persamaan orde dua menjadi sistem orde pertama? Berapa dimensinya?
3. Bagaimana syarat Lipschitz untuk sistem berkaitan dengan syarat Lipschitz skalar pada Seksi 5.1, dan apa yang dijamin teorema eksistensi?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Ubah $y'' + 4y' + 5y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ menjadi sistem orde pertama beserta syarat awalnya.

Kunci: Dengan $u_1 = y$, $u_2 = y'$: $u_1' = u_2$, $u_2' = \sin t - 4u_2 - 5u_1$, $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = -1$.

2. Terapkan satu langkah RK4 dengan $h = 0{,}5$ pada $y'' = -y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, dan bandingkan dengan solusi eksak $\sin t$ dan $\cos t$ di $t = 0{,}5$.

Kunci: Sistem $u_1' = u_2$, $u_2' = -u_1$, $\mathbf{u}_0 = (0, 1)$. Hasil satu langkah: $\mathbf{u}_1 = (0{,}479167,\ 0{,}877604)$. Eksak: $\sin 0{,}5 = 0{,}479426$, $\cos 0{,}5 = 0{,}877583$.

3. Sistem $x' = x + 2y$, $y' = 3x + 2y$ dengan $x(0) = 6$, $y(0) = 0$. Hitung dua langkah Euler dengan $h = 0{,}1$.

Kunci: Langkah 1: $(x', y') = (6, 18)$, $\mathbf{w}_1 = (6{,}6000,\ 1{,}8000)$. Langkah 2: $(x', y') = (10{,}2000, 23{,}4000)$, $\mathbf{w}_2 = (7{,}6200,\ 4{,}1400)$.

4. Tunjukkan bahwa $f(t, u_1, u_2) = 3u_1 - 2u_2 + t$ memenuhi syarat Lipschitz pada seluruh D dan tentukan konstanta L terkecil yang bekerja dengan norma jumlah.

Kunci:
$|f(t, u_1, u_2) - f(t, z_1, z_2)| = |3(u_1 - z_1) - 2(u_2 - z_2)| \leq 3|u_1 - z_1| + 2|u_2 - z_2| \leq 3(|u_1 - z_1| + |u_2 - z_2|)$. Jadi $L = 3$ (yaitu maksimum $|\partial f/\partial u_j|$), dan tidak bisa lebih kecil karena $u_2 = z_2$, $u_1 \neq z_1$ memberi rasio 3.

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.10 Stability

Rujukan buku: halaman 339

Sebuah metode numerik yang konsisten (galat pemotongan lokalnya menuju nol bila $h \to 0$) belum tentu bisa dipakai. Galat kecil yang pasti ada, baik galat pembulatan, galat nilai awal, maupun galat pemotongan yang sudah terjadi, harus tidak diperbesar secara tak terkendali oleh langkah-langkah berikutnya. Sifat ini disebut stabilitas. Seksi ini mengkaji hubungan tiga sifat, yaitu konsistensi, stabilitas, dan konvergensi, dengan hasil utama: metode yang konsisten konvergen jika dan hanya jika stabil.

Mulai dari metode satu langkah $w_{i+1} = w_i + h\,\phi(t_i, w_i, h)$. Metode dikatakan konsisten bila $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ (atau setara, galat pemotongan lokalnya menuju 0 saat $h \to 0$) dan konvergen bila galat maksimum $\max_i |y(t_i) - w_i| \to 0$ ketika $h \to 0$. Bila ϕ kontinu dan memenuhi syarat Lipschitz terhadap w dengan konstanta L pada himpunan yang sesuai, metode itu STABIL dalam arti perubahan kecil pada data awal atau pada tiap langkah menghasilkan perubahan yang terbatas pada solusi numerik, dan galat globalnya memenuhi

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{\tau(h)}{L}\, e^{\,L(t_i - a)},$$

dengan $\tau(h)$ batas atas galat pemotongan lokal pada setiap langkah. Jadi untuk metode satu langkah, kestabilan hampir otomatis, dan konsistensi menjamin konvergensi dengan laju sama seperti galat pemotongan lokal. Inilah mengapa Euler, Taylor, dan Runge-Kutta konvergen dengan orde yang telah kita turunkan.

Pada metode banyak langkah keadaan jauh lebih halus. Tulis metode m langkah $w_{i+1} = a_{m-1}w_i + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m})$ dan definisikan polinom karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda^{\,m} - a_{m-1}\lambda^{\,m-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0.$$

Bagian hF hilang saat $h \to 0$, sehingga untuk h kecil perilaku galat ditentukan oleh persamaan beda $w_{i+1} = a_{m-1}w_i + \cdots + a_0 w_{i+1-m}$. Solusi umumnya berbentuk $\sum_j c_j \lambda_j^{\,i}$ (bila akar sederhana), dengan λ_j akar P. Setiap akar dengan $|\lambda_j| > 1$ menyebabkan komponen yang membesar secara eksponensial terhadap banyak langkah, walaupun komponennya tidak ada pada solusi sejati. Syarat konsistensi menuntut $\lambda = 1$ merupakan akar P (supaya solusi konstan dapat dihasilkan), sehingga selalu ada satu akar yang bersesuaian dengan solusi sejati dan akar-akar lain disebut akar parasit.

Syarat akar (root condition): metode memenuhinya bila setiap akar P memenuhi $|\lambda_j| \le 1$ dan setiap akar yang bermodulus 1 adalah akar sederhana. Teorema: metode banyak langkah stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat akar; dan metode yang konsisten konvergen jika dan hanya jika stabil (bersama nilai awal yang galatnya menuju 0 saat $h \to 0$). Klasifikasi tambahan: bila $\lambda = 1$ satu-satunya akar bermodulus 1, metode STABIL KUAT; bila ada akar lain bermodulus 1, metode STABIL LEMAH; bila syarat akar dilanggar, metode TAK STABIL. Seluruh metode Adams (Bashforth dan Moulton) mempunyai $P(\lambda) = \lambda^{\,m} - \lambda^{\,m-1}$ dengan akar 1 dan 0 (ganda), sehingga stabil kuat dan itulah salah satu sebab metode ini populer. Metode Milne-Simpson dua langkah mempunyai $P(\lambda) = \lambda^{\,2} - 1$ dengan akar ± 1 sehingga hanya stabil lemah: konvergen tetapi akar parasit -1 bisa tumbuh untuk h tidak sangat kecil, seperti diperlihatkan pada Contoh 3.

Catatan penting: stabilitas di sini berarti perilaku saat $h \to 0$ dengan jumlah langkah membesar. Itu belum cukup untuk h tertentu (tidak kecil) pada persamaan dengan solusi meluruh cepat; untuk itu diperlukan ukuran stabilitas lain yang berpegang pada persamaan uji $y' = \lambda y$, yaitu stabilitas absolut dan ruang kestabilan, yang dibahas di Seksi 5.11. Selain itu, bagi metode banyak langkah, tuntutan stabilitas membatasi orde: tidak semua pilihan

Web by: Steven Paulus Siahaan

koefisien yang memberi orde tinggi merupakan metode stabil. Seksi ini menegaskan perlunya memeriksa polinom karakteristik sebelum memakai metode banyak langkah baru, dan memberi landasan bagi pembahasan kekakuan pada seksi berikutnya.

Konsep kunci

Konsistensi — Galat pemotongan lokal menuju 0 saat $h \to 0$. Untuk metode banyak langkah ini juga mensyaratkan $\lambda = 1$ merupakan akar P dan koefisien yang cocok pada bagian hF.

Konvergensi — $\max_i |y(t_i) - w_i| \to 0$ saat $h \to 0$ (dengan nilai awal yang galatnya juga menuju 0).

Stabilitas — Perubahan kecil pada data awal atau pada tiap langkah hanya menghasilkan perubahan terbatas pada solusi numerik. Untuk satu langkah cukup ϕ Lipschitz.

Polinom karakteristik — $P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_0$ dari bagian metode yang tidak memuat h; akar-akarnya menentukan stabilitas.

Syarat akar — Semua akar memenuhi $|\lambda| \le 1$ dan akar bermodulus 1 bersifat sederhana. Setara dengan stabilitas metode banyak langkah.

Stabil kuat, lemah, tak stabil — Kuat bila hanya $\lambda = 1$ bermodulus 1; lemah bila ada akar lain bermodulus 1; tak stabil bila syarat akar dilanggar.

Akar parasit — Akar P selain $\lambda = 1$. Ia tidak berkaitan dengan solusi sejati, tetapi bila bermodulus ≥ 1 komponennya mengganggu solusi numerik.

Teorema ekuivalensi — Metode konsisten konvergen jika dan hanya jika stabil (kondisi nilai awal konvergen).

Metode satu langkah

$$w_{i+1} = w_i + h\,\phi(t_i, w_i, h), \qquad \phi(t, y, 0) = f(t, y)$$

Galat global metode satu langkah

$$|y(t_i) - w_i| \le \frac{\tau(h)}{L}\, e^{L(t_i - a)}$$

Metode m langkah

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + hF(t_i, h, w_{i+1}, \ \ldots\ , w_{i+1-m})$$

Polinom karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0$$

Syarat akar

$$P(\lambda_j) = 0 \ \Rightarrow\ |\lambda_j| \le 1, \quad |\lambda_j| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda_j \text{ akar sederhana}$$

Contoh 1: Memeriksa syarat akar pada beberapa metode

Periksa konsistensi dasar (apakah $\lambda = 1$ akar) dan klasifikasikan kestabilan metode: (a) Adams-Bashforth tiga langkah, (b) $w_{i+1} = w_{i-1} + 2hf(t_i, w_i)$ (titik tengah), (c) $w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1} - 2hf(t_{i-1}, w_{i-1})$.

Penyelesaian.

(a) Metode Adams memiliki $w_{i+1} = w_i + h(\cdots)$ sehingga $a_2 = 1$, $a_1 = a_0 = 0$: $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1)$ dengan akar 1 dan 0 (ganda). Semua $|\lambda| \leq 1$, satu-satunya akar bermodulus 1 adalah $\lambda = 1$: STABIL KUAT.

(b) $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$, akar $+1$ dan -1, keduanya sederhana dan bermodulus 1: syarat akar terpenuhi tetapi ada akar parasit bermodulus 1: STABIL LEMAH.

(c) $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ dengan akar 1 dan 3. Karena $|3| > 1$, syarat akar dilanggar: TAK STABIL. Metode ini konsisten (galat pemotongan lokalnya berorde h^2, karena ekspansi Taylor menyisakan suku $\frac{2}{3}h^3y'''$), tetapi tidak konvergen. Contoh 2 memperlihatkan dampaknya secara numerik.

Contoh 2: Metode konsisten namun tak stabil: ledakan galat

Terapkan metode (c) pada $y' = -y$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}1$, dengan nilai awal eksak $w_0 = 1$ dan $w_1 = e^{-0{,}1}$. Hitung w_i untuk beberapa i.

Penyelesaian.

Untuk $f = -y$ rumusnya menjadi $w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1} + 2hw_{i-1} = 4w_i - 2{,}8w_{i-1}$.

$i = 2$ ($t = 0{,}2$): $w = 0{,}819350$ (eksak $0{,}818731$).

$i = 5$ ($t = 0{,}5$): $w = 0{,}642155$ (eksak $0{,}606531$).

$i = 10$ ($t = 1$): $w = 10{,}7822$ (eksak $0{,}367879$).

$i = 20$ ($t = 2$): $w = 8{,}412 \times 10^5$ (eksak $0{,}135335$).

$i = 30$ ($t = 3$): $w = 6{,}794 \times 10^{10}$ (eksak $0{,}049787$).

Galat kecil pada w_1 (bahkan galat pembulatan saja) memunculkan komponen $c\lambda^i$ dengan $\lambda \approx 3{,}1$ (akar $\lambda^2 - 4\lambda + 2{,}8 = 0$) yang tumbuh kira-kira $8{,}08 \times 10^4$ kali setiap 10 langkah, sehingga hasil menjadi tidak berguna. Mengecilkan h tidak menolong, karena akar parasit tetap berada di sekitar 3.

Contoh 3: Stabil lemah: Milne-Simpson pada $y' = -2y$

Metode Milne-Simpson $w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}]$ (galat pemotongan $O(h^4)$) dipakai pada $y' = -2y$, $y(0) = 1$ dengan $h = 0{,}2$ dan nilai awal eksak. Amati perilaku w_i dan jelaskan lewat akar karakteristik.

Penyelesaian.

Untuk $f = -2y$ dengan $z = h\lambda = -0{,}4$, rumus menjadi $(1 - \frac{z}{3})w_{i+1} - \frac{4z}{3}w_i - (1 + \frac{z}{3})w_{i-1} = 0$. Akar persamaan karakteristiknya adalah $0{,}6703$ dan $-1{,}1409$. Akar pertama $\approx e^z = 0{,}6703$ meniru solusi sejati; akar kedua (parasit) bernilai mutlak lebih dari 1 dan bertanda negatif.

Hasil numerik:

$t = 1$ ($i = 5$): $w = 0{,}135340$, eksak $0{,}135335$ (sangat baik).

$t = 2$ ($i = 10$): $w = 0{,}018229$, eksak $0{,}018316$.

$t = 4$ ($i = 20$): $w = 4{,}66 \times 10^{-5}$, eksak $3{,}35 \times 10^{-4}$ (galat relatif sudah sekitar 86 persen).

$t = 6$ ($i = 30$): $w = -1{,}07 \times 10^{-3}$, eksak $6{,}14 \times 10^{-6}$: tanda sudah salah.

$t = 8$ ($i = 40$): $w = -4{,}03 \times 10^{-3}$, eksak $1{,}13 \times 10^{-7}$.

Komponen parasit bertumbuh dengan faktor $1{,}141$ per langkah dan bertanda bergantian, sehingga akhirnya menenggelamkan solusi yang meluruh. Pada $h \to 0$ metode tetap konvergen (stabil), tetapi pada h tetap dan interval panjang gejala ini menjadi nyata.

Kesalahan umum

• Menyimpulkan bahwa metode orde tinggi pasti baik. Konsistensi tidak cukup: metode (c) pada Contoh 1 berorde dua tetapi tak stabil dan tidak konvergen.

• Menganggap akar bermodulus 1 selalu aman. Akar bermodulus 1 yang ganda melanggar syarat akar, dan akar -1 (stabil lemah) tetap bisa mengganggu untuk h tidak kecil.

• Mengecek polinom karakteristik pada seluruh hF. Polinom P hanya memakai bagian metode yang tidak memuat h, yaitu koefisien a_j.

• Memakai stabilitas untuk menjamin ketelitian pada h besar. Stabilitas (limit $h \to 0$) berbeda dari stabilitas absolut (h tetap, Seksi 5.11).

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa akar bermodulus 1 harus sederhana dalam syarat akar? Apa yang terjadi bila akar 1 ganda?
2. Jelaskan hubungan konsistensi, stabilitas, dan konvergensi, dan tunjukkan mengapa satu saja tidak cukup.
3. Mengapa metode Adams lebih disukai daripada Milne-Simpson untuk simulasi jangka panjang walaupun keduanya berorde tinggi?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan akar polinom karakteristik dan klasifikasikan kestabilan untuk $w_{i+1} = 2w_i - w_{i-1} + h\,[\cdots]$.

Kunci: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, akar ganda $\lambda = 1$ yang bermodulus 1 tetapi TIDAK sederhana. Syarat akar dilanggar: tak stabil (solusi persamaan beda berbentuk $c_1 + c_2 i$ yang tumbuh linear terhadap i).

2. Klasifikasikan metode Adams-Moulton dua langkah $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]$ lewat polinom karakteristiknya.

Kunci: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, akar 0 dan 1. Satu-satunya akar bermodulus 1 adalah 1 (sederhana): stabil kuat.

3. Pada Contoh 2, bila galat awal pada w_1 adalah $\delta = 10^{-8}$, perkirakan besar galat setelah 30 langkah bila komponen parasit tumbuh dengan faktor $\lambda \approx 3{,}0954$ per langkah (gunakan akar sebenarnya dari $\lambda^2 - 4\lambda + 2{,}8 = 0$).

Kunci: Akar terbesar $\lambda = 3{,}0954$; $\lambda^{30} = 5{,}27 \times 10^{14}$, sehingga galat $\approx \delta\lambda^{30} \approx 5{,}27 \times 10^{6}$ (jauh melampaui ukuran solusi yang ≤ 1).

4. Mengapa metode satu langkah dengan ϕ Lipschitz tidak mempunyai masalah akar parasit?

Kunci: Metode satu langkah hanya memakai w_i sehingga persamaan beda pembangunnya berorde satu, $w_{i+1} = w_i$ bila $h \to 0$, dengan satu akar $\lambda = 1$ saja. Tidak ada akar tambahan yang bisa tumbuh.

Web by: Steven Paulus Siahaan

5.11 Stiff Differential Equations

Rujukan buku: halaman 348

Persamaan diferensial KAKU (stiff) adalah persamaan yang solusinya mengandung komponen yang meluruh sangat cepat, seperti e^{-ct} dengan c besar, bersama komponen yang berubah lambat. Setelah masa transien singkat, solusi hampir hanya bagian yang lambat dan halus, sehingga ketelitian dapat dicapai dengan langkah h yang besar. Namun metode eksplisit biasa dipaksa memakai h sangat kecil sepanjang selang, bukan karena ketelitian tetapi karena kestabilan: walaupun komponen cepat sudah lenyap pada solusi sejati, galat yang menumpang pada komponen itu akan diledakkan oleh metode bila h terlalu besar.

Cara terbaik memahaminya adalah dengan persamaan uji $y' = \lambda y$, $y(0) = \alpha$, dengan $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (solusi $\alpha e^{\lambda t}$ meluruh). Metode satu langkah menghasilkan $w_{i+1} = Q(h\lambda)\, w_i$ dengan fungsi Q yang khas bagi metode. Solusi numerik meluruh bila $|Q(h\lambda)| < 1$; himpunan $z = h\lambda$ yang memenuhi hal itu disebut daerah kestabilan absolut. Euler eksplisit: $Q(z) = 1 + z$, sehingga untuk λ real negatif diperlukan $h < \frac{2}{|\lambda|}$. Runge-Kutta orde empat: $Q(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$, dengan batas $z > -2{,}785$ pada sumbu real. Metode Runge-Kutta eksplisit selalu memiliki Q berupa polinom dalam z sehingga $|Q| \to \infty$ untuk $|z| \to \infty$ dan daerah kestabilannya terbatas.

Metode IMPLISIT mempunyai Q berupa fungsi rasional dan dapat memiliki daerah kestabilan yang jauh lebih luas. Euler mundur $w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1})$ memberi $Q(z) = \frac{1}{1-z}$ dan kaidah trapesium $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]$ memberi $Q(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$. Keduanya memenuhi $|Q(z)| < 1$ untuk SEMUA z dengan $\operatorname{Re} z < 0$, sifat yang disebut A-stabil: h boleh sebesar apa pun tanpa menyebabkan ledakan. Perbedaan halus: untuk $z \to -\infty$ Euler mundur memberi $Q \to 0$ (komponen cepat dibunuh langsung), sedangkan trapesium memberi $Q \to -1$ (komponen cepat meluruh sangat lambat dengan tanda bergantian). Untuk metode banyak langkah ada batas keras (Dahlquist): metode A-stabil linear berorde paling tinggi dua, sehingga metode implisit orde tinggi yang dipakai pada soal kaku (mis. rumus diferensiasi mundur BDF) hanya A(α)-stabil atau stabil pada sebagian bidang kiri.

Untuk sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, perilakunya ditentukan oleh nilai eigen λ_j dari A (atau Jacobi $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{y}$ pada sistem nonlinear). Semua $h\lambda_j$ harus berada di daerah kestabilan absolut. Sistem disebut kaku bila nilai eigen yang berpartisipasi memiliki bagian real negatif dengan rasio

$$\frac{\max_j |\operatorname{Re}\lambda_j|}{\min_j |\operatorname{Re}\lambda_j|}$$

sangat besar (rasio kekakuan). Metode eksplisit dibatasi oleh nilai eigen terbesar sementara waktu simulasi ditentukan oleh yang terkecil, sehingga jumlah langkah membengkak.

Konsekuensi praktis: untuk soal kaku gunakan metode implisit yang A-stabil atau hampir A-stabil. Harganya, pada setiap langkah harus diselesaikan persamaan (umumnya nonlinear) untuk w_{i+1}. Untuk f linear dalam y cukup menyelesaikan satu persamaan linear atau sistem linear; untuk f nonlinear dipakai metode Newton (Bab 10) dengan matriks Jacobi $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$, atau iterasi titik tetap yang dibatasi langkahnya sehingga kembali ke masalah kestabilan. Karena sebuah langkah implisit mahal tetapi h bisa jauh lebih besar, metode ini menang untuk soal kaku dan kalah pada soal tak kaku. Perlu diingat pula bahwa A-stabilitas hanya menjamin hasil meluruh, bukan akurat: h tetap dipilih supaya ketelitian pada bagian lambat terpenuhi. Seksi ini melengkapi Seksi 5.10: stabilitas di sana tentang $h \to 0$, kekakuan tentang h tetap yang tidak kecil.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Persamaan kaku — Solusi memuat komponen meluruh sangat cepat dan komponen lambat; kestabilan, bukan ketelitian, membatasi h pada metode eksplisit.

Persamaan uji — $y' = \lambda y$ dengan $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Metode satu langkah memberi $w_{i+1} = Q(h\lambda)w_i$, dengan Q fungsi penguatan.

Daerah kestabilan absolut — Himpunan $z = h\lambda$ dengan $|Q(z)| < 1$. Euler: cakram $|1+z| < 1$; pada sumbu real $-2 < z < 0$; RK4: $-2{,}785 < z < 0$.

A-stabil — Daerah kestabilan memuat seluruh setengah bidang kiri $\operatorname{Re} z < 0$. Euler mundur dan trapesium A-stabil; metode eksplisit tidak pernah.

Rasio kekakuan — $\max|\operatorname{Re}\lambda_j| / \min|\operatorname{Re}\lambda_j|$. Rasio besar berarti kaku.

Metode implisit — Mengharuskan penyelesaian persamaan untuk w_{i+1} di tiap langkah (Newton bila nonlinear), tetapi mengizinkan h besar pada soal kaku.

Penekanan komponen cepat — Euler mundur: $Q \to 0$ saat $z \to -\infty$, trapesium: $Q \to -1$ (meluruh lambat dan berosilasi).

Persamaan uji dan satu langkah

$$y' = \lambda y, \quad w_{i+1} = Q(h\lambda)\, w_i, \quad |Q(h\lambda)| < 1$$

Euler eksplisit dan batas langkah

$$Q(z) = 1 + z, \qquad h < \tfrac{2}{|\lambda|} \ (\lambda < 0)$$

Runge-Kutta orde empat

$$Q(z) = 1 + z + \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{6} + \tfrac{z^4}{24}, \qquad -2{,}785 < z < 0$$

Euler mundur

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_{i+1}, w_{i+1}), \qquad Q(z) = \tfrac{1}{1-z}$$

Kaidah trapesium

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})], \qquad Q(z) = \tfrac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

Rasio kekakuan

$$\frac{\max\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j|}{\min\limits_j |\operatorname{Re}\lambda_j|}$$

Contoh 1: Euler eksplisit pada persamaan kaku

Untuk $y' = -80\,(y - \cos t) - \sin t$, $y(0) = 2$ (solusi eksak $y = \cos t + e^{-80t}$), hitung $y(1)$ dengan Euler eksplisit untuk $h = 0{,}05$, $0{,}02$, dan $0{,}0125$. Jelaskan dengan faktor $1 + h\lambda$.

Penyelesaian.

Galat Euler memenuhi $e_{i+1} = (1 + h\lambda)e_i + \tau_i$, τ_i galat pemotongan, dengan $\lambda = -80$. Nilai eksak $y(1) = 0{,}540302$.

$h = 0{,}05$: $1 + h\lambda = -3$, $|-3| > 1$ sehingga galat membesar tiga kali lipat tiap langkah dan berganti tanda. $w_1 = -2$, $w_2 = 9{,}9925$, dan $w_{20} \approx 3{,}49 \times 10^9$ di $t = 1$, jauh dari $0{,}540302$.

$h = 0{,}02$: $1 + h\lambda = -0{,}6$, $|-0{,}6| < 1$: stabil. $y(1) \approx 0{,}540370$, galat $6{,}82 \times 10^{-5}$ (tetapi ada osilasi di awal karena faktor negatif).

$h = 0{,}0125$: $1 + h\lambda = 0$, sehingga komponen cepat dihapus dalam satu langkah. $y(1) \approx 0{,}540345$, galat $4{,}28 \times 10^{-5}$.

Batas kestabilan Euler adalah $h < \frac{2}{80} = 0{,}025$. Di bawah batas itu hasil baik meskipun solusi sejati sudah praktis sama dengan $\cos t$ sejak $t \approx 0{,}1$; langkah h yang jauh lebih besar akan cukup untuk ketelitian tetapi tidak untuk kestabilan.

Contoh 2: Euler mundur dan trapesium pada soal yang sama

Pada soal Contoh 1, hitung $y(1)$ dengan Euler mundur dan kaidah trapesium memakai $h = 0{,}05$ (di mana Euler eksplisit meledak).

Penyelesaian.

Untuk $h = 0{,}05$, $z = h\lambda = -4$. Euler mundur: $Q(z) = \frac{1}{1-z} = 0{,}20$ dan $|Q| < 1$. Karena f linear, setiap langkah menyelesaikan satu persamaan linear: $w_{i+1} = \frac{w_i + h\,[-\lambda \cos t_{i+1} - \sin t_{i+1}]}{1 - h\lambda}$.

Hasil: $y(1) \approx 0{,}540126$, galat $1{,}76 \times 10^{-4}$. Galat lebih besar daripada kaidah trapesium karena Euler mundur hanya berorde satu.

Kaidah trapesium: $Q(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2} = -0{,}3333$, $|Q| < 1$ juga. Hasil: $y(1) \approx 0{,}540304$, galat $2{,}17 \times 10^{-6}$, lebih kecil karena berorde dua. Faktor negatif $-\frac{1}{3}$ menyebabkan osilasi awal yang meluruh.

Keduanya stabil pada $h = 0{,}05$ yang membuat Euler eksplisit meledak, memperlihatkan manfaat metode implisit untuk persamaan kaku.

Contoh 3: Batas langkah untuk sistem kaku dan RK4

Sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ dengan $y_1' = -501y_1 + 499y_2$, $y_2' = 499y_1 - 501y_2$. Tentukan nilai eigen, rasio kekakuan, dan batas h untuk Euler eksplisit dan RK4. Berapa langkah yang diperlukan untuk $t \in [0, 5]$?

Penyelesaian.

Nilai eigen: $\lambda_1 = -1000$ dan $\lambda_2 = -2$ (jumlah $= -1002$, determinan $= 501^2 - 499^2 = 2000$). Rasio kekakuan $= \frac{1000}{2} = 500$.

Batas Euler: $h < \frac{2}{|\lambda_{\max}|} = \frac{2}{1000} = 0{,}002$, atau 2500 langkah untuk $[0, 5]$. Batas RK4 (akar real $|Q| = 1$ pada $z \approx -2{,}785$): $h < \frac{-2{,}785}{1000} \approx 0{,}00279$, atau sekitar 1796 langkah dengan evaluasi $4\times$ lebih banyak per langkah. Padahal komponen cepat e^{-1000t} menghilang sebelum $t = 0{,}01$ dan sisanya, e^{-2t}, dapat diikuti dengan h kira-kira $0{,}1$ sampai ketelitian wajar. Metode implisit A-stabil bebas dari batas ini sehingga h ditentukan oleh ketelitian, hanya sekitar 50 langkah.

Kesalahan umum

• Menganggap h kecil karena solusinya berubah cepat. Pada soal kaku solusi sudah halus dan h kecil hanya dibutuhkan oleh kestabilan, bukan ketelitian.

• Menyimpulkan metode eksplisit orde tinggi (mis. RK4) bebas dari masalah. Daerah kestabilannya tetap terbatas: $h|\lambda| < 2{,}785$.

• Menyamakan A-stabil dengan akurat. A-stabil hanya menjamin hasil tidak meledak; ketelitian pada komponen lambat tetap bergantung pada orde dan h.

• Lupa bahwa Euler mundur dan trapesium menuntut penyelesaian persamaan untuk w_{i+1} di tiap langkah (nonlinear bila f nonlinear), jadi biaya per langkah lebih besar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa metode eksplisit tidak pernah A-stabil? (Petunjuk: perhatikan $Q(z)$ saat $|z| \to \infty$.)
2. Bandingkan perilaku Euler mundur dan trapesium untuk komponen yang sangat cepat. Metode mana yang lebih baik dan dalam kondisi apa?
3. Bagaimana Anda memutuskan suatu soal kaku dan memilih metode? Apa petunjuk praktis dari nilai eigen matriks Jacobi?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $y' = -250y + \dots$ (komponen cepat dengan $\lambda = -250$), berapa batas h agar Euler eksplisit stabil? Berapa batas untuk RK4?

Kunci: Euler: $h < \frac{2}{250} = 0{,}008$. RK4: $h < \frac{2{,}785}{250} = 0{,}01114$.

2. Hitung faktor penguatan $Q(z)$ untuk $z = -10$ pada Euler eksplisit, Euler mundur, dan kaidah trapesium, lalu nyatakan mana yang stabil.

Kunci: Euler eksplisit: $Q = 1 + z = -9$ (tak stabil). Euler mundur: $Q = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{11} \approx 0{,}0909$ (stabil, meluruh kuat). Trapesium: $Q = \frac{1-5}{1+5} = -\frac{2}{3}$ (stabil, tetapi bergantian tanda).

3. Sistem dengan nilai eigen -3 dan -600. Tentukan rasio kekakuan dan banyak langkah minimum Euler eksplisit untuk $t \in [0, 6]$ (gunakan h tepat di batas kestabilan).

Kunci: Rasio $= \frac{600}{3} = 200$. Batas $h < \frac{2}{600} = \frac{1}{300}$, sehingga paling sedikit $\frac{6}{1/300} = 1800$ langkah (sedikit lebih, karena h harus benar-benar lebih kecil dari batas).

4. Tunjukkan bahwa kaidah trapesium A-stabil: $|Q(z)| < 1$ untuk $\operatorname{Re} z < 0$.

Kunci: $|Q| < 1 \Leftrightarrow |1 + z/2| < |1 - z/2|$. Dengan $z = x + iy$: $|1 + z/2|^2 = (1 + x/2)^2 + y^2/4$ dan $|1 - z/2|^2 = (1 - x/2)^2 + y^2/4$, selisihnya $= 2x$, sehingga $|Q| < 1$ tepat bila $x = \operatorname{Re} z < 0$.

Pesan Utama

Ingat

Orde yang lebih tinggi membeli ketelitian, tetapi kestabilan menentukan apakah galat membesar; pada persamaan kaku, kestabilan lebih penting daripada orde.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan