MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 6

Metode Langsung untuk Sistem Linear

Direct Methods for Solving Linear Systems

Halaman buku 357 – 428 • 7 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Ringkasan Bab

Bab ini membahas penyelesaian langsung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Eliminasi Gauss mereduksi sistem menjadi segitiga atas lalu substitusi mundur, dengan biaya $O(n^3)$. Tanpa strategi pivot, pembagi yang kecil atau nol merusak hasil; pivot parsial, berskala, atau penuh menjaga kestabilan.

Faktorisasi LU memisahkan pekerjaan eliminasi dari sisi kanan sehingga banyak $\mathbf{b}$ dapat diselesaikan murah. Matriks khusus (diagonal dominan, definit positif, pita, tridiagonal) memiliki faktorisasi yang lebih hemat, misalnya Cholesky dan algoritma Crout.

Tujuan Pembelajaran

1. Melakukan eliminasi Gauss dengan dan tanpa pivoting serta menghitung determinan.
2. Menyusun faktorisasi LU dan menggunakannya untuk menyelesaikan sistem.
3. Menghitung invers matriks dan menilai biaya operasinya.
4. Memilih metode untuk matriks simetris definit positif atau tridiagonal.

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
6.1	Linear Systems of Equations	358	Def. 6.1; 3 contoh
6.2	Pivoting Strategies	372	4 contoh
6.3	Linear Algebra and Matrix Inversion	381	Def. 6.2; Def. 6.3; Def. 6.4; Teo. 6.5; Def. 6.6; Def. 6.7; Teo. 6.8; Def. 6.9 ...; 4 contoh
6.4	The Determinant of a Matrix	396	Def. 6.15; Teo. 6.16; Teo. 6.17; Kor. 6.18; 2 contoh
6.5	Matrix Factorization	400	Teo. 6.19; 3 contoh
6.6	Special Types of Matrices	411	Def. 6.20; Teo. 6.21; Def. 6.22; Teo. 6.23; Def. 6.24; Teo. 6.25; Teo. 6.26; Kor. 6.27 ...; 4 contoh
6.7	Survey of Methods and Software	428	–

Rumus dan Metode Kunci

Substitusi mundur

$$x_i = \tfrac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)$$

Faktorisasi LU

$$A = LU \;\Rightarrow\; L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Determinan

$$\det A = \det L \cdot \det U = \prod_i u_{ii} \quad (\text{jika } l_{ii} = 1)$$

Cholesky (A simetris definit positif)

$$A = LL^T$$

Syarat diagonal dominan ketat

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{untuk setiap } i$$

6.1 Linear Systems of Equations

Rujukan buku: halaman 358

Sistem persamaan linear muncul di hampir semua cabang sains terapan: analisis rangkaian listrik, struktur rangka, aliran fluida, regresi kuadrat terkecil, hingga diskretisasi persamaan diferensial. Bentuk umumnya adalah n persamaan dengan n yang tidak diketahui, $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ untuk $i = 1, \ldots, n$. Dalam notasi matriks sistem ini ditulis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $A = [a_{ij}]$ matriks koefisien berukuran $n \times n$, $\mathbf{x}$ vektor yang dicari, dan $\mathbf{b}$ ruas kanan. Bab ini membahas metode langsung, yaitu metode yang, bila tidak ada galat pembulatan, memberi jawaban eksak setelah sejumlah langkah berhingga.

Ide dasarnya adalah mengubah sistem menjadi sistem lain yang mempunyai himpunan penyelesaian sama tetapi jauh lebih mudah diselesaikan. Tiga operasi baris dijamin tidak mengubah penyelesaian: (1) mengalikan sebuah persamaan dengan konstanta tak nol, (2) menambahkan kelipatan satu persamaan ke persamaan lain, dan (3) menukar dua persamaan. Dengan operasi tipe kedua kita dapat meniadakan variabel x_1 dari persamaan ke-2 sampai ke-n, lalu x_2 dari persamaan ke-3 sampai ke-n, dan seterusnya. Hasilnya adalah sistem segitiga atas. Proses ini dinamakan eliminasi Gauss.

Agar ringkas, sistem ditulis sebagai matriks diperbesar (augmented) $[A, \mathbf{b}]$, yaitu matriks $n \times (n+1)$ dengan $\mathbf{b}$ sebagai kolom terakhir. Pada tahap ke-k, baris ke-k dipakai sebagai baris pivot dan elemen a_{kk} sebagai pivot. Untuk setiap baris $j > k$ dihitung pengali $m_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$, lalu baris j diganti dengan baris j dikurangi m_{jk} kali baris k. Setelah $n-1$ tahap diperoleh matriks segitiga atas, dan penyelesaian dicari dengan substitusi mundur:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}, \qquad x_i = \frac{a_{i,n+1} - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

Metode ini hanya berjalan bila semua pivot tidak nol. Bila pada tahap ke-k pivot $a_{kk} = 0$, kita mencari baris di bawahnya, yaitu baris $p > k$ dengan $a_{pk} \neq 0$, lalu menukarnya dengan baris k. Jika tidak ada baris seperti itu, kolom tersebut tidak punya pivot dan matriks A singular: sistem tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai tak hingga banyak penyelesaian, bergantung pada konsistensi ruas kanan. Sebaliknya, bila A nonsingular, eliminasi dengan pertukaran baris yang tepat selalu selesai dan memberi penyelesaian tunggal.

Biaya hitung diukur dengan banyak perkalian/pembagian dan penjumlahan/pengurangan, karena perkalian lebih mahal pada komputer. Eliminasi Gauss dengan substitusi mundur memerlukan $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$ perkalian/pembagian dan $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$ penjumlahan/pengurangan. Jadi biaya tumbuh seperti $n^3/3$: menggandakan ukuran sistem membuat pekerjaan sekitar delapan kali lebih banyak. Hampir seluruh biaya ada pada tahap eliminasi; substitusi mundur hanya berbiaya orde n^2.

Catatan sejarah singkat: teknik serupa sudah dikenal di Tiongkok kuno, sedangkan Gauss memakainya secara sistematis untuk masalah kuadrat terkecil. Pada seksi berikutnya kita akan melihat bahwa eliminasi tanpa strategi memilih pivot dapat memberi hasil buruk akibat galat pembulatan (Seksi 6.2), dan bahwa eliminasi yang sama sebenarnya menghasilkan faktorisasi matriks (Seksi 6.5).

Konsep kunci

Matriks diperbesar — Matriks $[A, \mathbf{b}]$ berukuran $n \times (n+1)$ yang memuat semua informasi sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sehingga variabel tidak perlu ditulis berulang.

Operasi baris elementer — Tiga operasi (skala tak nol, tambah kelipatan baris lain, tukar baris) yang mengubah bentuk sistem tanpa mengubah himpunan penyelesaiannya.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Pivot dan pengali — Pada tahap k, a_{kk} adalah pivot dan $m_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$ adalah pengali yang dipakai untuk menolkan entri di bawah pivot.

Bentuk segitiga atas — Matriks yang semua entri di bawah diagonalnya nol. Sistem berbentuk ini diselesaikan dengan substitusi mundur dari persamaan terakhir ke atas.

Substitusi mundur — Menghitung x_n dari persamaan terakhir, lalu x_{n-1}, dan seterusnya sampai x_1, dengan memakai nilai yang sudah diketahui.

Matriks singular — Matriks bujur sangkar tanpa invers. Eliminasi menunjukkannya lewat hilangnya pivot di suatu kolom; sistemnya tak punya penyelesaian atau punya tak hingga banyak.

Cacah operasi — Eliminasi Gauss berbiaya orde $\frac{n^3}{3}$ operasi, sehingga sistem besar mahal dan perlu memanfaatkan struktur matriks bila ada.

Pengali eliminasi

$$m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad a_{ji}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k)} - m_{jk}\, a_{ki}^{(k)} \quad (j > k)$$

Substitusi mundur

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(a_{i,\, n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right), \qquad i = n, n-1, \ \ldots, 1$$

Perkalian/pembagian eliminasi Gauss

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

Penjumlahan/pengurangan eliminasi Gauss

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

Algoritma: Eliminasi Gauss dengan substitusi mundur

1. Bentuk matriks diperbesar $[A, \mathbf{b}]$ dengan entri a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n+1$.
2. Untuk $k = 1, \ldots, n-1$: cari bilangan terkecil $p \geq k$ dengan $a_{pk} \neq 0$. Jika tidak ada, hentikan dan laporkan bahwa tidak ada penyelesaian tunggal.
3. Jika $p \neq k$, tukar baris p dan baris k.
4. Untuk $j = k+1, \ldots, n$: hitung $m_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$ lalu ganti baris j dengan (baris j) $- m_{jk}$ (baris k).
5. Jika $a_{nn} = 0$, hentikan: tidak ada penyelesaian tunggal.
6. Hitung $x_n = \frac{a_{n,\, n+1}}{a_{nn}}$ dan untuk $i = n-1, \ldots, 1$ hitung $x_i = \frac{a_{i,\, n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$.

Contoh 1: Eliminasi Gauss pada sistem 3×3

Selesaikan $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6$, $4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 7$, $6x_1 + 8x_2 + 15x_3 = 19$ dengan eliminasi Gauss dan substitusi mundur.

Penyelesaian.

Matriks diperbesar (tiap baris ditulis sebagai koefisien x_1, x_2, x_3 lalu ruas kanan):

$R_1 = (2, 1, 3, 6)$, $R_2 = (4, 5, 4, 7)$, $R_3 = (6, 8, 15, 19)$.

Tahap 1: pengali $m_{21} = \frac{4}{2} = 2$ dan $m_{31} = \frac{6}{2} = 3$. Operasi $R_2 - 2R_1 \to R_2$ dan $R_3 - 3R_1 \to R_3$ memberi $R_2 = (0, 3, -2, -5)$ dan $R_3 = (0, 5, 6, 1)$.

Tahap 2: pengali $m_{32} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$. Operasi $R_3 - \frac{5}{3}R_2 \to R_3$ memberi $R_3 = (0, 0, \frac{28}{3}, \frac{28}{3})$.

Substitusi mundur: $x_3 = \frac{\frac{28}{3}}{\frac{28}{3}} = 1$; $x_2 = \frac{-5 - (-2)(1)}{3} = -1$; $x_1 = \frac{6 - (-1) - 3(1)}{2} = 2$.

Penyelesaian: $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$. Periksa pada persamaan ketiga: $6(2) + 8(-1) + 15(1) = 19$, cocok dengan $b_3 = 19$.

Contoh 2: Biaya eliminasi Gauss

Berapa perkalian/pembagian dan penjumlahan/pengurangan yang diperlukan eliminasi Gauss untuk $n = 10$ dan $n = 100$?

Penyelesaian.

Untuk $n = 10$: perkalian/pembagian $= \frac{1000}{3} + 100 - \frac{10}{3} = 430$, penjumlahan/pengurangan $= \frac{1000}{3} + 50 - \frac{25}{3} = 375$ (angka ini sudah dicocokkan dengan hitungan langsung).

Untuk $n = 100$: perkalian/pembagian $= 343300$ dan penjumlahan/pengurangan $= 338250$.

Menaikkan n sepuluh kali lipat menaikkan biaya sekitar 798 kali, mendekati $10^3 = 1000$ yang diprediksi suku $n^3/3$ (selisihnya berasal dari suku n^2). Substitusi mundur sendiri hanya memakai $\frac{n^2 + n}{2} = 5050$ perkalian/pembagian pada $n = 100$, kurang dari 2% dari total.

Contoh 3: Pivot nol dan sistem tak konsisten

Tinjau $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$. Apakah ada penyelesaian?

Penyelesaian.

Tahap 1: $R_2 - 2R_1 \to R_2$ memberi baris $(0,\ 0,\ 0 \mid 1)$, dan $R_3 - R_1 \to R_3$ memberi $(0,\ 1,\ 0 \mid 1)$.

Pada tahap 2 pivot $a_{22} = 0$. Baris di bawahnya, yaitu baris 3, punya entri tak nol di kolom 2 sehingga baris 2 dan 3 ditukar: baris 2 menjadi $(0,\ 1,\ 0 \mid 1)$ dan baris 3 menjadi $(0,\ 0,\ 0 \mid 1)$.

Baris terakhir menyatakan $0 \cdot x_3 = 1$, mustahil. Jadi sistem tidak konsisten dan tidak punya penyelesaian. Matriks koefisiennya singular: kolom 3 tidak punya pivot. Seandainya ruas kanan kedua adalah 6 (bukan 7), baris terakhir menjadi $0 = 0$ dan sistem punya tak hingga banyak penyelesaian dengan x_3 bebas.

Kesalahan umum

• Lupa mengubah ruas kanan $\mathbf{b}$ bersama baris matriks. Setiap operasi baris harus dikenakan pada seluruh baris matriks diperbesar, termasuk kolom terakhir.

• Memakai pengali dengan tanda terbalik, yaitu menambah padahal seharusnya mengurangi. Pengali $m_{jk} = \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$ dipakai pada operasi baris j dikurangi m_{jk} kali baris k.

• Membagi dengan pivot nol atau pivot sangat kecil tanpa menukar baris. Pivot nol membuat program gagal, dan pivot kecil memperbesar galat pembulatan (lihat Seksi 6.2).

• Menyimpulkan sistem tak punya penyelesaian hanya karena pivot nol muncul. Nol di posisi pivot bisa diatasi dengan menukar baris; sistem baru singular bila tidak ada pengganti di seluruh kolom di bawahnya.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa tiga operasi baris tidak mengubah himpunan penyelesaian? Apa yang akan rusak bila kita boleh mengalikan sebuah persamaan dengan nol?
2. Bila A nonsingular, apakah ada kemungkinan eliminasi Gauss gagal? Jelaskan peran pertukaran baris.
3. Cacah operasi tumbuh sebagai $n^3/3$. Untuk matriks dengan banyak entri nol (jarang), bagaimana Anda mengurangi biayanya?
4. Apa beda makna sistem tak konsisten dan sistem dengan tak hingga banyak penyelesaian, dilihat dari bentuk akhir matriks diperbesar?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Selesaikan $2x_1 + x_2 - x_3 = 5$, $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12$, $-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5$ dengan eliminasi Gauss.

Kunci: Pengali $m_{21} = 2$, $m_{31} = -1$; setelah tahap 1 baris 2 $= (0, 1, 0 \mid 2)$ dan baris 3 $= (0, 6, 2 \mid 10)$; $m_{32} = 6$ memberi $2x_3 = -2$. Penyelesaian: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -1)$.

2. Tunjukkan bahwa sistem $x_1 + 2x_2 = 3$, $2x_1 + 4x_2 = 6$ punya tak hingga banyak penyelesaian dan nyatakan semuanya.

Kunci: $R_2 - 2R_1$ memberi $(0, 0 \mid 0)$. Pilih $x_2 = t$ bebas, maka $x_1 = 3 - 2t$. Himpunan penyelesaian: $\{(3 - 2t,\ t)\}$ untuk semua bilangan real t.

3. Berapa perkalian/pembagian untuk eliminasi Gauss dengan $n = 20$? Berapa kali lipat dibanding $n = 10$?

Kunci: $\frac{8000}{3} + 400 - \frac{20}{3} = 3060$. Untuk $n = 10$ ada 430, rasionya ≈ 7.12, mendekati 8.

4. Matriks diperbesar $(1, 1 \mid 2)$ dan $(1, 1 \mid 3)$ merepresentasikan sistem apa, dan bagaimana eliminasi Gauss menunjukkannya?

Kunci: $R_2 - R_1$ memberi $(0, 0 \mid 1)$, yaitu $0 = 1$: sistem tidak konsisten, tidak ada penyelesaian.

Steven Paulus Siahaan

6.2 Pivoting Strategies

Rujukan buku: halaman 372

Eliminasi Gauss pada Seksi 6.1 membutuhkan elemen pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Jika elemen itu nol, kita menukar baris. Namun masalahnya lebih halus: pivot yang tidak nol tetapi sangat kecil dibandingkan elemen lain di kolomnya juga berbahaya pada aritmetika dengan jumlah digit terbatas. Seksi ini membahas strategi pivoting, yaitu aturan memilih dan menukar baris (atau kolom) agar galat pembulatan tidak membesar.

Mengapa pivot kecil merusak? Pada langkah ke-k kita menghitung pengali $m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. Bila pembagi kecil, $|m_{jk}|$ sangat besar, dan setiap galat pembulatan kecil pada baris pivot ikut dikalikan dengan m_{jk} ketika baris itu dikurangkan dari baris lain. Pada substitusi mundur, x_k dihitung dengan membagi dengan $a_{kk}^{(k)}$ yang kecil, sehingga galat pada pembilang diperbesar lagi. Dua efek ini bersama-sama bisa menghancurkan jawaban bahkan pada sistem 2×2, seperti yang diperlihatkan Contoh 1 di bawah.

Pivoting sebagian (partial pivoting) memilih pada langkah ke-k bilangan terbesar dalam harga mutlak pada kolom ke-k dari baris k ke bawah, yaitu bilangan $p \geq k$ terkecil yang memenuhi $|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$, lalu menukar baris k dengan baris p. Akibatnya semua pengali memenuhi $|m_{jk}| \leq 1$, sehingga galat tidak diperbesar oleh pengali. Biaya tambahannya hanya pencarian maksimum di satu kolom, sekitar $n^2/2$ perbandingan secara total, sehingga dapat diabaikan terhadap sekitar $n^3/3$ perkalian pada eliminasinya sendiri. Dalam implementasi, penukaran baris tidak perlu memindahkan data; cukup menukar penunjuk indeks baris (larik NROW pada algoritma buku).

Pivoting sebagian dapat tertipu bila skala baris sangat berbeda. Suatu baris dengan semua koefisien berukuran besar akan menang dalam perbandingan mutlak, padahal elemen pivotnya relatif kecil terhadap barisnya sendiri. Pivoting sebagian berskala (scaled partial pivoting) mengatasinya: pertama hitung faktor skala $s_i = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$ untuk tiap baris (sekali saja di awal), lalu pada langkah ke-k pilih baris p yang memaksimumkan rasio $\frac{|a_{pk}^{(k)}|}{s_p}$ di antara $p \geq k$. Faktor skala tidak diperbarui selama eliminasi, sehingga biaya tambahannya hanya sekitar n^2 pembagian untuk perbandingan.

Strategi terkuat adalah pivoting lengkap (complete pivoting): pada langkah ke-k dicari elemen terbesar dalam harga mutlak di seluruh submatriks $a_{ij}^{(k)}$ dengan $i, j \geq k$, lalu baris dan kolom ditukar. Penukaran kolom berarti urutan peubah x_j ikut berubah, sehingga kita harus mencatat permutasinya dan mengembalikannya pada akhir. Pencarian di seluruh submatriks memerlukan sekitar $n^3/3$ perbandingan tambahan, jadi biaya totalnya sebanding dengan biaya eliminasi sendiri. Karena itu pivoting lengkap jarang dipakai; pada praktiknya pivoting sebagian (dengan atau tanpa skala) sudah memberikan kestabilan yang memadai pada hampir semua soal.

Ringkasnya: tanpa pivoting, eliminasi Gauss dapat tidak stabil; dengan pivoting sebagian biayanya hampir tidak bertambah; skala berguna bila koefisien antarbaris berbeda orde besarnya; pivoting lengkap hanya untuk kasus ekstrem. Ada kelas matriks yang tidak memerlukan pivoting sama sekali, yaitu matriks yang dominan diagonal secara ketat dan matriks definit positif (Seksi 6.6). Pivoting juga berkaitan erat dengan faktorisasi $PA = LU$ pada Seksi 6.5: seluruh penukaran baris dikumpulkan dalam satu matriks permutasi P.

Konsep kunci

Elemen pivot dan pengali — Pivot adalah $a_{kk}^{(k)}$ yang dipakai untuk meniadakan elemen di bawahnya; pengalinya $m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$. Pivot kecil menghasilkan pengali besar yang memperbesar galat pembulatan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Pivoting sebagian — Pilih elemen terbesar dalam harga mutlak pada kolom aktif dari baris k ke bawah, lalu tukar baris. Menjamin $|m_{jk}| \le 1$ dengan biaya tambahan kecil.

Pivoting sebagian berskala — Pilih baris yang memaksimumkan rasio $|a_{pk}^{(k)}|/s_p$ dengan s_p elemen terbesar (mutlak) baris p pada matriks awal. Cocok bila skala antarbaris sangat berbeda.

Pivoting lengkap — Pilih elemen mutlak terbesar di seluruh submatriks aktif, dengan penukaran baris dan kolom. Paling stabil tetapi paling mahal, dan urutan peubah berubah sehingga harus dicatat.

Penukaran simulasi (larik NROW) — Baris tidak dipindahkan secara fisik; larik indeks baris yang ditukar. Ini menghemat operasi penyalinan data.

Galat pembulatan dan aritmetika digit terbatas — Pada aritmetika d digit, setiap operasi dibulatkan. Selisih dua bilangan besar yang hampir sama (pembatalan) dan pembagian dengan bilangan kecil adalah sumber utama kerusakan.

Matriks yang tidak butuh pivoting — Matriks dominan diagonal secara ketat dan matriks simetris definit positif dapat dieliminasi tanpa penukaran baris dengan hasil yang stabil (lihat Seksi 6.6).

Pengali eliminasi

$$m_{jk} = \frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} - m_{jk}\, a_{kl}^{(k)}$$

Kriteria pivoting sebagian

$$|a_{pk}^{(k)}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}^{(k)}|$$

Faktor skala baris

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Kriteria pivoting berskala

$$\frac{|a_{pk}^{(k)}|}{s_p} = \max_{k \le i \le n} \frac{|a_{ik}^{(k)}|}{s_i}$$

Kriteria pivoting lengkap

$$|a_{pq}^{(k)}| = \max_{k \le i,\, j \le n} |a_{ij}^{(k)}|$$

Algoritma: Eliminasi Gauss dengan pivoting sebagian berskala

1. Masukkan matriks diperbesar $[A \,|\, \mathbf{b}]$ berukuran $n \times (n+1)$. Hitung $s_i = \max_j |a_{ij}|$ untuk tiap baris dan set larik indeks $\mathrm{NROW}(i) = i$. Bila ada $s_i = 0$, berhenti: matriks singular.
2. Untuk $k = 1, \ldots, n-1$: cari $p \in \{k, \ldots, n\}$ yang memaksimumkan $\frac{|a(\mathrm{NROW}(p), k)|}{s_{\mathrm{NROW}(p)}}$ (gunakan baris yang dituju oleh NROW).

3. Jika elemen terpilih sama dengan nol, keluarkan pesan bahwa tidak ada solusi tunggal, lalu berhenti.
4. Jika $p \neq k$, tukar nilai NROW(k) dan NROW(p) (penukaran simulasi).
5. Untuk setiap $j = k+1, \ldots, n$: hitung pengali $m_{jk} = \frac{a(\mathrm{NROW}(j), k)}{a(\mathrm{NROW}(k), k)}$ dan kurangkan m_{jk} kali baris pivot dari baris NROW(j).
6. Jika elemen $a(\mathrm{NROW}(n), n) = 0$, tidak ada solusi tunggal. Bila tidak, lakukan substitusi mundur mulai dari $x_n = \frac{a(\mathrm{NROW}(n), n+1)}{a(\mathrm{NROW}(n), n)}$ dan seterusnya untuk $x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Contoh 1: Dampak pivot kecil pada aritmetika empat digit

Selesaikan sistem $0{,}0020\,x_1 + 4{,}37\,x_2 = 4{,}39$ dan $3{,}15\,x_1 - 2{,}20\,x_2 = 20{,}0$ dengan pembulatan empat angka signifikan, (a) tanpa pivoting dan (b) dengan pivoting sebagian. Solusi eksaknya $x_1 \approx 7{,}0486$, $x_2 \approx 1{,}0014$.

Penyelesaian.

(a) Tanpa pivoting, pivotnya $0{,}0020$ dan pengalinya $m_{21} = \frac{3{,}15}{0{,}0020} = 1575$. Baris kedua menjadi:

$a'_{22} = -2{,}20 - 1575 \cdot 4{,}37 = -2{,}20 - 6883 = -6885$ (setelah pembulatan), dan $b'_2 = 20{,}0 - 1575 \cdot 4{,}39 = 20{,}0 - 6914 = -6894$.

Maka $x_2 = \frac{-6894}{-6885} \approx 1{,}001$ (cukup akurat). Tetapi $x_1 = \frac{4{,}39 - 4{,}37 \cdot 1{,}001}{0{,}0020} = \frac{4{,}39 - 4{,}374}{0{,}0020} = \frac{0{,}016}{0{,}0020} = 8{,}0$, padahal nilai benarnya $7{,}0486$. Selisih kecil sekitar $0{,}0004$ pada x_2 (dan pembulatan $4{,}374$) dibagi dengan pivot $0{,}0020$ sehingga x_1 meleset hampir 1.

(b) Dengan pivoting sebagian, tukar kedua baris karena $|3{,}15| > |0{,}0020|$. Pengalinya $m = \frac{0{,}0020}{3{,}15} = 0{,}0006349$. Baris pertama (semula) menjadi $a'_{22} = 4{,}37 - (0{,}0006349)(-2{,}20) = 4{,}371$ dan $b'_2 = 4{,}39 - (0{,}0006349)(20{,}0) = 4{,}377$. Maka $x_2 = \frac{4{,}377}{4{,}371} \approx 1{,}001$ dan $x_1 = \frac{20{,}0 + 2{,}20 \cdot 1{,}001}{3{,}15} = \frac{22{,}20}{3{,}15} \approx 7{,}048$, yang benar sampai empat angka signifikan (galat sekitar $0{,}0006$).

Contoh 2: Memilih pivot: sebagian versus berskala

Sistem memiliki baris-baris koefisien $(4,\ 2,\ 1)$, $(10,\ 2000,\ 5000)$, $(1,\ 3,\ 2)$ dan ruas kanan $(7,\ -990,\ 5)$. Tentukan pivot pertama menurut pivoting sebagian dan menurut pivoting berskala, lalu selesaikan sistemnya.

Penyelesaian.

Faktor skala: $s_1 = 4$, $s_2 = 5000$, $s_3 = 3$.

Pivoting sebagian membandingkan $|4|, |10|, |1|$ dan memilih baris 2 (elemen 10). Padahal baris 2 didominasi koefisien besar 2000 dan 5000, sehingga 10 relatif kecil terhadap barisnya.

Pivoting berskala membandingkan rasio $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{10}{5000} = 0{,}002$, $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$, sehingga memilih baris 1 (elemen 4). Pengali selanjutnya $\frac{10}{4} = 2{,}5$ dan $\frac{1}{4} = 0{,}25$, semuanya terkendali.

Penyelesaian eksak (dengan pecahan) adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$. Pada aritmetika digit terbatas, pilihan berskala menghindari pengurangan baris 2 yang bernilai besar dari baris-baris kecil sehingga lebih terjaga akurasinya.

Contoh 3: Eliminasi dengan pivoting sebagian pada sistem $3 imes 3$

Selesaikan $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$, $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$, $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 13$ dengan pivoting sebagian.

Penyelesaian.

Kolom 1: elemen terbesar adalah 3 pada baris 2, jadi tukar baris 1 dan 2:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 13$$

Pengali $m_{21} = \frac{1}{3}$, $m_{31} = \frac{2}{3}$. Baris 2 baru: $\frac{7}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$. Baris 3 baru: $\frac{14}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 13 - \frac{14}{3} = \frac{25}{3}$.

Kolom 2: bandingkan $\frac{7}{3}$ dan $\frac{14}{3}$, maka tukar. Pengali $\frac{7/3}{14/3} = \frac{1}{2}$. Baris terakhir: $\left(-\frac{5}{3} + \frac{1}{6}\right)x_3 = -\frac{1}{3} - \frac{25}{6}$, yaitu $-\frac{3}{2}x_3 = -\frac{9}{2}$, jadi $x_3 = 3$.

Substitusi mundur: $\frac{14}{3}x_2 = \frac{25}{3} + 1 = \frac{28}{3}$ sehingga $x_2 = 2$, lalu $3x_1 = 7 + 2 - 6 = 3$ sehingga $x_1 = 1$. Solusi: $(1, 2, 3)$.

Kesalahan umum

• Mengira pivoting hanya diperlukan bila pivot bernilai tepat nol. Pivot yang kecil (bukan nol) sudah cukup untuk merusak hasil pada aritmetika digit terbatas.

• Menghitung ulang faktor skala s_i pada tiap langkah eliminasi. Pada pivoting berskala versi baku, s_i dihitung sekali dari matriks awal dan tidak diperbarui.

• Lupa mencatat penukaran kolom pada pivoting lengkap, sehingga peubah x_j yang diperoleh tertukar urutannya. Penukaran baris tidak mengubah urutan peubah, tetapi penukaran kolom mengubahnya.

• Menganggap pivoting menjamin galat kecil untuk semua sistem. Pivoting mengendalikan pertumbuhan galat akibat algoritma, tetapi sistem yang secara inheren sensitif (kondisi buruk) tetap menghasilkan galat besar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa syarat $|m_{jk}| \leq 1$ penting bagi kestabilan? Jelaskan bagaimana galat pada baris pivot menjalar ke baris lain.
2. Berikan contoh matriks 2×2 yang pivoting sebagiannya memilih elemen yang tampak buruk menurut pivoting berskala. Apa moral dari contoh itu?
3. Pivoting lengkap lebih stabil, tetapi hampir tidak dipakai. Jelaskan pertimbangan biaya-manfaat yang mendasarinya.
4. Mengapa matriks dominan diagonal secara ketat tidak memerlukan pivoting?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Pada matriks dengan baris $(0{,}001,\ 1)$ dan $(1,\ 1)$, hitung pengali m_{21} tanpa pivoting dan dengan pivoting sebagian. Mana yang lebih aman terhadap galat pembulatan, dan mengapa?

Kunci: Tanpa pivoting: $m_{21} = \frac{1}{0{,}001} = 1000$. Dengan pivoting sebagian baris ditukar sehingga pivotnya 1 dan $m_{21} = \frac{0{,}001}{1} = 0{,}001$. Pilihan kedua lebih aman karena $|m| \le 1$, jadi galat pada baris pivot tidak diperbesar.

2. Hitung faktor skala dan pilih pivot pertama (pivoting berskala) untuk baris-baris $(2,\ 100,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 0{,}5,\ 0{,}2)$.

Kunci: $s = (100,\ 3,\ 1)$. Rasio kolom 1: $\frac{2}{100} = 0{,}02$, $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{1}{1} = 1$. Nilai maksimum 1 dicapai pertama kali di baris 2, jadi baris 2 menjadi pivot (bila seri, pilih indeks terkecil).

3. Selesaikan $x_1 + 9x_2 = 19$, $2x_1 + x_2 = 4$ dengan pivoting lengkap dan jelaskan mengapa hasil akhir harus disusun ulang.

Kunci: Elemen terbesar adalah 9 pada posisi $(1, 2)$, jadi kolom 1 dan 2 ditukar; urutan peubah menjadi (x_2, x_1). Sistem: $9x_2 + x_1 = 19$, $x_2 + 2x_1 = 4$. Pengali $\frac{1}{9}$ menghasilkan $\frac{17}{9}x_1 = \frac{17}{9}$, jadi $x_1 = 1$, lalu $x_2 = \frac{19 - 1}{9} = 2$. Hasil dalam urutan $(x_2, x_1) = (2, 1)$ harus dikembalikan ke $(x_1, x_2) = (1, 2)$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

6.3 Linear Algebra and Matrix Inversion

Rujukan buku: halaman 381

Seksi ini mengumpulkan bahasa aljabar linear yang diperlukan untuk membicarakan sistem persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ secara ringkas. Matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $m \times n$ adalah susunan bilangan dalam m baris dan n kolom. Penjumlahan matriks dan perkalian dengan skalar dilakukan entri demi entri, sedangkan perkalian dua matriks A ($m \times n$) dan B ($n \times p$) menghasilkan matriks AB ($m \times p$) dengan entri

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Syaratnya, banyak kolom A harus sama dengan banyak baris B. Perkalian matriks bersifat asosiatif dan distributif, tetapi pada umumnya tidak komutatif: $AB \neq BA$, dan bahkan salah satu dari keduanya bisa tidak terdefinisi. Matriks identitas I bertindak sebagai unsur netral perkalian, sedangkan matriks diagonal, segitiga atas, dan segitiga bawah adalah bentuk khusus yang membuat perhitungan jauh lebih murah.

Pertanyaan utama pada seksi ini adalah kapan sebuah matriks bujur sangkar A memiliki kebalikan (invers). Matriks A ($n \times n$) disebut nonsingular bila ada A^{-1} dengan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; bila tidak ada, A disebut singular. Kebalikan, bila ada, tunggal, dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (urutannya terbalik). Ada sejumlah pernyataan yang ekuivalen untuk matriks $n \times n$: A nonsingular, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya punya solusi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ punya solusi tunggal untuk setiap $\mathbf{b}$, eliminasi Gauss dengan pertukaran baris dapat dijalankan sampai selesai, dan $\det A \neq 0$. Ekuivalensi ini adalah jembatan antara teori dan algoritma: kegagalan eliminasi karena tidak ada pivot taknol yang bisa dipilih sama artinya dengan singularnya matriks.

Cara menghitung invers sama dengan menyelesaikan n sistem sekaligus. Bila $\mathbf{e}_j$ adalah kolom ke-j dari I, maka kolom ke-j dari A^{-1} adalah solusi $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$. Dalam praktik, kita membentuk matriks gabungan $[A \mid I]$ lalu mengubahnya dengan operasi baris menjadi $[I \mid A^{-1}]$ (eliminasi Gauss-Jordan). Biaya total sekitar n^3 perkalian/pembagian, tiga kali lebih mahal daripada eliminasi Gauss biasa untuk satu sistem yang kira-kira $\frac{n^3}{3}$. Karena itu, untuk menyelesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kita tidak membentuk A^{-1} lalu menghitung $A^{-1}\mathbf{b}$: cara itu lebih mahal dan biasanya sedikit kurang teliti. Invers baru layak dihitung eksplisit bila entri-entrinya memang dibutuhkan.

Transpos A^{t} diperoleh dengan menukar baris dan kolom, $(A^{t})_{ij} = a_{ji}$. Sifat pentingnya: $(AB)^{t} = B^{t}A^{t}$ dan $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$. Matriks dengan $A^{t} = A$ disebut simetris; sifat ini akan dimanfaatkan pada Seksi 6.6. Selain itu, bila A nonsingular maka A^{t} juga nonsingular.

Seksi ini juga memperkenalkan gambaran geometris: perkalian $A\mathbf{x}$ adalah kombinasi linear kolom-kolom A dengan koefisien komponen $\mathbf{x}$. Sistem punya solusi tepat bila $\mathbf{b}$ berada dalam ruang yang direntang kolom-kolom A. Pemahaman ini membantu membedakan kasus tanpa solusi dan kasus tak hingga banyak solusi pada matriks singular. Semua yang dibahas di sini dipakai pada seksi berikutnya: determinan (6.4) memberi ukuran singularitas, faktorisasi (6.5) menyusun ulang eliminasi sebagai hasil kali matriks, dan matriks khusus (6.6) menyediakan jaminan agar eliminasi aman dijalankan.

Konsep kunci

Perkalian matriks — Entri $(AB)_{ij}$ adalah hasil kali dalam baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Tidak komutatif, tetapi asosiatif: $(AB)C = A(BC)$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Matriks nonsingular — Matriks bujur sangkar A yang punya invers A^{-1}. Ekuivalen dengan $\det A \neq 0$ dan dengan solusi tunggal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ untuk setiap $\mathbf{b}$.

Invers hasil kali — $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ bila keduanya nonsingular. Urutan faktor terbalik, sama seperti pada transpos.

Transpos dan simetri — $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ dan $(AB)^t = B^t A^t$. Matriks simetris memenuhi $A^t = A$.

Eliminasi Gauss-Jordan — Mengubah $[A \mid I]$ menjadi $[I \mid A^{-1}]$ dengan operasi baris elementer. Biayanya sekitar n^3 operasi, tiga kali eliminasi Gauss untuk satu sistem.

Matriks segitiga dan diagonal — Matriks yang semua entri di bawah (atau di atas) diagonal nol. Sistem berbentuk ini diselesaikan dengan substitusi mundur (atau maju) dalam $O(n^2)$ operasi.

Matriks identitas — I dengan $I_{ij} = 1$ bila $i = j$ dan 0 bila lainnya; $AI = IA = A$. Kolom ke-j dari I dilambangkan $\mathbf{e}_j$.

Entri hasil kali matriks

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Definisi invers

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Invers dan transpos hasil kali

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (AB)^t = B^t A^t$$

Kolom-kolom invers

$$A\,\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{e}_j \;\Rightarrow\; A^{-1} = [\mathbf{x}^{(1)}\ \mathbf{x}^{(2)}\ \cdots\ \mathbf{x}^{(n)}]$$

Invers matriks 2 kali 2 (bila $ad - bc \neq 0$)

$$\tfrac{1}{ad-bc}\,(d,\ -b;\ -c,\ a)$$

Algoritma: Menghitung invers dengan Gauss-Jordan

1. Bentuk matriks gabungan $[A \mid I]$ berukuran $n \times 2n$.
2. Untuk $k = 1, \ldots, n$: cari baris $p \geq k$ dengan $a_{pk} \neq 0$ (pilih yang terbesar mutlaknya); bila tidak ada, hentikan karena A singular. Tukar baris p dengan baris k.
3. Bagi baris k dengan pivot a_{kk} sehingga pivot menjadi 1.
4. Untuk setiap baris $i \neq k$ (di atas maupun di bawah), kurangkan a_{ik} kali baris k agar entri kolom k menjadi 0.
5. Setelah $k = n$, separuh kiri menjadi I dan separuh kanan adalah A^{-1}.

Contoh 1: Perkalian dua matriks tak bujur sangkar

Hitung AB dan BA untuk A (2×3) dengan baris $(1,\ 2,\ 0)$ dan $(3,\ -1,\ 4)$, serta B (3×2) dengan baris $(2,\ 1)$, $(0,\ 3)$ dan $(-1,\ 1)$.

Penyelesaian.

AB berukuran 2×2. Entri $(1,1)$: $1\cdot 2+2\cdot 0+0\cdot(-1)=2$. Entri $(1,2)$: $1\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot 1=7$. Entri $(2,1)$: $3\cdot 2+(-1)\cdot 0+4\cdot(-1)=2$. Entri $(2,2)$: $3\cdot 1+(-1)\cdot 3+4\cdot 1=4$. Jadi baris-baris AB adalah $(2,\ 7)$ dan $(2,\ 4)$.

BA berukuran 3×3 dengan baris $(5,\ 3,\ 4)$, $(9,\ -3,\ 12)$ dan $(2,\ -3,\ 4)$.

Ukuran AB dan BA saja sudah berbeda, sehingga perkalian matriks jelas tidak komutatif.

Contoh 2: Invers matriks 3 kali 3 dan penggunaannya

Matriks C memiliki baris $(2,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 3,\ 1)$ dan $(0,\ 1,\ 2)$. Tentukan C^{-1} dengan Gauss-Jordan, lalu hitung $\mathbf{x}=C^{-1}\mathbf{b}$ untuk $\mathbf{b}=(1,2,3)^{t}$.

Penyelesaian.

Eliminasi Gauss-Jordan pada $[C\,|\,I]$ (dihitung dengan aritmetika pecahan eksak) menghasilkan $\det C=8$ dan

$$C^{-1}=\tfrac{1}{8}\,M,\qquad M\ \text{berbaris}\ (5,\ -2,\ 1),\ (-2,\ 4,\ -2),\ (1,\ -2,\ 5).$$

Pemeriksaan: baris pertama C dikalikan kolom pertama M memberi $2\cdot 5+1\cdot(-2)+0\cdot 1=8$, yaitu $8\cdot 1$, dan baris pertama C dikalikan kolom kedua M memberi $2\cdot(-2)+1\cdot 4+0=0$. Seluruh hasil $CC^{-1}=I$ telah dicek dengan kode.

Solusi: $\mathbf{x}=\tfrac{1}{8}M\mathbf{b}$ dengan $M\mathbf{b}=(5-4+3,\ -2+8-6,\ 1-4+15)=(4,\ 0,\ 12)$. Jadi $\mathbf{x}=(\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{3}{2})^{t}$. Substitusi kembali: $2\cdot\tfrac{1}{2}+0=1$, $\tfrac{1}{2}+0+\tfrac{3}{2}=2$, $0+\tfrac{3}{2}\cdot 2=3$. Cocok dengan $\mathbf{b}$.

Contoh 3: Invers matriks 2 kali 2 dan singularitas

Tentukan invers S dengan baris $(1,\ 2)$ dan $(3,\ 4)$. Kemudian tunjukkan bahwa P dengan baris $(2,\ 1)$ dan $(4,\ 2)$ singular.

Penyelesaian.

Untuk matriks 2×2 dengan entri a,b,c,d berlaku $\frac{1}{ad-bc}$ kali matriks dengan baris $(d,\ -b)$ dan $(-c,\ a)$. Di sini $ad-bc=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$, sehingga S^{-1} berbaris $(-2,\ 1)$ dan $(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{2})$. Cek: baris kedua S dikali kolom pertama S^{-1} adalah $3\cdot(-2)+4\cdot\tfrac{3}{2}=0$, dan dikali kolom kedua adalah $3\cdot 1+4\cdot(-\tfrac{1}{2})=1$.\n\nUntuk P: $ad-bc=2\cdot 2-1\cdot 4=0$. Baris kedua adalah dua kali baris pertama, sehingga eliminasi menghasilkan baris nol dan tidak ada invers. Sistem $P\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tidak punya solusi atau punya tak hingga banyak solusi, tergantung $\mathbf{b}$.

Kesalahan umum

• Menganggap $AB = BA$. Perkalian matriks umumnya tidak komutatif, jadi urutan faktor tidak boleh ditukar sembarangan.

• Menulis $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ atau $(AB)^{t} = A^{t}B^{t}$. Yang benar adalah urutan terbalik: $B^{-1}A^{-1}$ dan $B^{t}A^{t}$.

• Menyelesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan menghitung A^{-1} lebih dulu. Itu sekitar tiga kali lebih mahal daripada eliminasi Gauss dan biasanya tidak lebih teliti.

• Mengira matriks dengan semua entri taknol pasti nonsingular. Contohnya P di atas: semua entrinya taknol, tetapi singular karena barisnya saling berkelipatan.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa membentuk A^{-1} untuk menyelesaikan satu sistem tidak efisien, dan dalam situasi apa menghitung A^{-1} secara eksplisit masuk akal?
2. Jelaskan dengan kata-kata mengapa $\det A \neq 0$, solusi tunggal untuk setiap $\mathbf{b}$, dan keberhasilan eliminasi Gauss adalah pernyataan yang ekuivalen.
3. Perkalian $A\mathbf{x}$ dapat dipandang sebagai kombinasi linear kolom-kolom A. Bagaimana pandangan ini menjelaskan kapan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak punya solusi?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung AB bila A berbaris $(2,\ 0)$ dan $(1,\ 3)$, sedangkan B berbaris $(1,\ 4)$ dan $(2,\ -1)$. Apakah $AB = BA$?

Kunci: AB berbaris $(2,\ 8)$ dan $(7,\ 1)$; BA berbaris $(6,\ 12)$ dan $(3,\ -3)$. Tidak sama, jadi $AB \neq BA$.

2. Tentukan A^{-1} untuk A berbaris $(4,\ 7)$ dan $(2,\ 6)$.

Kunci: $ad - bc = 24 - 14 = 10$, sehingga A^{-1} berbaris $(\frac{3}{5},\ -\frac{7}{10})$ dan $(-\frac{1}{5},\ \frac{2}{5})$; yaitu $\frac{1}{10}$ kali matriks berbaris $(6,\ -7)$ dan $(-2,\ 4)$.

3. Bila A dan B nonsingular $n \times n$, buktikan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Kunci: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$, dan secara serupa $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Karena invers tunggal, terbukti.

6.4 The Determinant of a Matrix

Rujukan buku: halaman 396

Determinan adalah bilangan yang diasosiasikan dengan setiap matriks bujur sangkar A dan ditulis $\det A$ atau $|A|$. Bagi analisis numerik, kegunaan utamanya bersifat teoretis: A nonsingular tepat ketika $\det A \neq 0$. Seksi ini mengulang definisi dan sifat-sifat determinan, lalu menunjukkan mengapa determinan hampir tidak pernah dihitung dari definisinya.

Definisi dibangun secara rekursif. Untuk matriks 1×1, $\det A = a_{11}$. Untuk $n \geq 2$, minor M_{ij} adalah determinan matriks $(n-1) \times (n-1)$ yang didapat dengan menghapus baris i dan kolom j dari A, dan kofaktornya $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Determinan dapat diekspansi sepanjang baris mana pun atau kolom mana pun:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (\text{baris } i \text{ tetap}), \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (\text{kolom } j \text{ tetap})$$

Cara ini berguna untuk matriks kecil atau yang banyak nolnya, sebab baris atau kolom yang penuh nol memberi suku-suku nol. Namun jumlah operasinya meledak: ekspansi kofaktor penuh membutuhkan jumlah perkalian yang tumbuh seperti $n!$. Untuk $n = 20$ saja, angkanya sudah melebihi 10^{18}, sehingga tidak masuk akal sebagai metode komputasi.

Jalan keluarnya adalah sifat-sifat determinan terhadap operasi baris elementer. Pertama, bila A segitiga (atas atau bawah) maka $\det A$ adalah hasil kali entri diagonalnya. Kedua, menukar dua baris mengubah tanda determinan. Ketiga, mengalikan satu baris dengan skalar λ mengalikan determinan dengan λ. Keempat, menambahkan kelipatan satu baris ke baris lain tidak mengubah determinan. Dua baris yang sama, atau satu baris yang berupa kelipatan baris lain, membuat determinan nol. Dari sini diperoleh prosedur praktis: lakukan eliminasi Gauss sampai A menjadi segitiga atas U dengan s kali pertukaran baris, maka

$$\det A = (-1)^s \, u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$$

Biayanya sama dengan eliminasi Gauss, sekitar $\frac{n^3}{3}$ operasi, dan jauh lebih murah daripada $n!$.

Sifat lain yang penting: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\det A^{\,t} = \det A$, dan bila A nonsingular maka $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Untuk matriks $n \times n$ dan skalar c berlaku $\det(cA) = c^n \det A$, bukan $c \det A$. Perhatikan pula bahwa $\det(A+B)$ pada umumnya tidak sama dengan $\det A + \det B$.

Ada dua catatan kehati-hatian numerik. Pertama, nilai determinan bukan ukuran yang baik untuk seberapa dekat sebuah matriks dengan singular. Matriks diagonal $0{,}1\, I$ berukuran 30×30 memiliki determinan 10^{-30}, padahal kondisinya sangat baik; sebaliknya matriks bisa nyaris singular dengan determinan yang tampak biasa. Ukuran yang tepat untuk itu adalah bilangan kondisi. Kedua, pada aritmetika floating-point sisa pivot yang secara teori nol akan muncul sebagai bilangan sangat kecil, sehingga pengujian "$\det A = 0$" harus memakai toleransi dan tidak boleh dengan kesamaan persis.

Seksi ini menjembatani Seksi 6.3 (kenonsingularan) dengan Seksi 6.5: faktorisasi $A = LU$ langsung memberi determinan sebagai hasil kali diagonal U bila L memiliki diagonal satu.

Konsep kunci

Minor dan kofaktor — M_{ij} adalah determinan setelah baris i dan kolom j dihapus; kofaktornya $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Ekspansi sepanjang baris atau kolom mana pun memberi $\det A$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Determinan matriks segitiga — Sama dengan hasil kali entri diagonalnya. Inilah dasar perhitungan determinan lewat eliminasi.

Efek operasi baris — Tukar baris mengubah tanda, kali skalar λ mengalikan determinan dengan λ, dan tambah kelipatan baris lain tidak mengubah apa pun.

Determinan dan singularitas — A nonsingular jika dan hanya jika $\det A \neq 0$. Baris yang bergantung linear membuat determinan nol.

Sifat perkalian — $\det(AB) = \det A \det B$, $\det A^{\,t} = \det A$, dan $\det A^{\,-1} = \frac{1}{\det A}$.

Biaya ekspansi kofaktor — Tumbuh seperti $n!$ sehingga tidak praktis untuk n besar. Eliminasi hanya butuh sekitar $\frac{n^3}{3}$ operasi.

Determinan bukan ukuran kondisi — Determinan kecil tidak berarti nyaris singular, dan sebaliknya. Gunakan bilangan kondisi untuk menilai kepekaan sistem.

Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

Determinan lewat eliminasi (s pertukaran baris)

$$\det A = (-1)^s \, u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$$

Determinan hasil kali

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Determinan kebalikan dan kelipatan skalar

$$\det A^{\,-1} = \frac{1}{\det A}, \qquad \det(cA) = c^n \det A$$

Determinan matriks 2 kali 2

$$\det\ (a,\ b;\ c,\ d) = ad - bc$$

Algoritma: Determinan dengan eliminasi Gauss

1. Set $d = 1$.
2. Untuk $k = 1, \ \ldots, n$: cari baris $p \geq k$ dengan $a_{pk} \neq 0$. Bila tidak ada, kembalikan $\det A = 0$ dan berhenti.
3. Bila $p \neq k$, tukar baris p dan k lalu ganti d dengan $-d$.
4. Ganti d dengan $d \cdot a_{kk}$.
5. Untuk $i = k+1, \ \ldots, n$: kurangkan $\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ kali baris k dari baris i (tidak mengubah determinan).
6. Setelah $k = n$, nilai d adalah $\det A$.

Contoh 1: Determinan matriks 4 kali 4 lewat eliminasi

Hitung $\det A$ untuk A berbaris $(1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $(2,\ 5,\ 1,\ 3)$, $(0,\ 1,\ 3,\ 2)$ dan $(1,\ 3,\ 2,\ 6)$.

Penyelesaian.

Eliminasi tanpa pertukaran baris. Kolom 1: kurangkan $2\times$ baris 1 dari baris 2, tidak ada operasi untuk baris 3 (entrinya sudah 0), dan kurangkan $1\times$ baris 1 dari baris 4. Matriks menjadi baris-baris $(1,\ 2,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 3,\ 2)$, $(0,\ 1,\ 2,\ 5)$.

Kolom 2: kurangkan baris 2 dari baris 3 dan dari baris 4. Hasilnya baris 3 $=(0,\ 0,\ 2,\ 1)$ dan baris 4 $=(0,\ 0,\ 1,\ 4)$.

Kolom 3: kurangkan $\frac{1}{2}\times$ baris 3 dari baris 4, sehingga baris 4 menjadi $(0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{2})$.

Diagonal segitiga atas adalah $1,\ 1,\ 2,\ \frac{7}{2}$ dan $s=0$, jadi

$$\det A = 1\cdot 1\cdot 2\cdot \tfrac{7}{2} = 7$$

Hasil ini sama dengan perhitungan eksak dengan pecahan di kode.

Contoh 2: Matriks dengan pertukaran baris, dicek dengan ekspansi kofaktor

Hitung $\det A$ untuk A berbaris $(0,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$ dan $(2,\ 1,\ 3)$ dengan dua cara.

Penyelesaian.

Cara 1 (eliminasi). Entri $a_{11}=0$, jadi tukar baris 1 dan 2 (satu pertukaran, $s=1$). Matriks menjadi $(1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 3)$. Kurangkan $2\times$ baris 1 dari baris 3 sehingga menjadi $(0,\ -1,\ 1)$. Kemudian tambahkan $\frac{1}{2}\times$ baris 2 ke baris 3 sehingga menjadi $(0,\ 0,\ \frac{3}{2})$. Diagonalnya $1,\ 2,\ \frac{3}{2}$, sehingga $\det A=(-1)^1\cdot 1\cdot 2\cdot \frac{3}{2}=-3$.

Cara 2 (ekspansi sepanjang kolom pertama). Hanya $a_{21}=1$ dan $a_{31}=2$ yang taknol. Minor M_{21} adalah determinan dari baris $(2,\ 1)$ dan $(1,\ 3)$, yaitu $6-1=5$, dengan tanda $(-1)^{2+1}=-1$. Minor M_{31} adalah determinan dari baris $(2,\ 1)$ dan $(1,\ 1)$, yaitu $2-1=1$, dengan tanda $(-1)^{3+1}=+1$. Jadi

$$\det A = 1\cdot(-1)\cdot 5 + 2\cdot(+1)\cdot 1 = -5+2=-3$$

Kedua cara sepakat.

Contoh 3: Sifat hasil kali dan kelipatan skalar

Untuk S berbaris $(1,\ 2)$ dan $(3,\ 4)$ serta B berbaris $(2,\ 0)$ dan $(1,\ 3)$, periksa bahwa $\det(SB)=\det S\det B$ dan hitung $\det(3S)$.

Penyelesaian.

$\det S=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$ dan $\det B=2\cdot 3-0\cdot 1=6$, sehingga hasil kalinya -12.

Hasil kali SB berbaris $(4,\ 6)$ dan $(10,\ 12)$ dengan $\det(SB)=4\cdot 12-6\cdot 10=48-60=-12$. Sama, sesuai sifat.

Untuk $3S$ (ukuran $n=2$): $\det(3S)=3^2\det S=9\cdot(-2)=-18$. Cek langsung: $3S$ berbaris $(3,\ 6)$ dan $(9,\ 12)$, determinannya $36-54=-18$.

Kesalahan umum

• Menghitung determinan dengan ekspansi kofaktor penuh untuk matriks besar. Biayanya sekitar $n!$ operasi, jauh melebihi eliminasi.

• Lupa mengubah tanda determinan setiap kali menukar dua baris saat eliminasi.

• Menulis $\det(cA) = c\det A$. Yang benar $\det(cA) = c^n \det A$ untuk matriks $n \times n$, karena setiap dari n baris dikalikan c.

• Menganggap $\det(A+B) = \det A + \det B$, atau menganggap determinan kecil berarti matriks hampir singular. Keduanya keliru.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa operasi “tambah kelipatan baris lain” tidak mengubah determinan, sedangkan “kali baris dengan skalar” mengubahnya?
2. Mengapa determinan kurang cocok sebagai pengukur kedekatan dengan singularitas? Beri contoh matriks nonsingular dengan determinan sangat kecil tetapi berkondisi baik.
3. Dalam aritmetika floating-point, bagaimana Anda memutuskan apakah sebuah matriks dianggap singular saat eliminasi berhenti karena pivot sangat kecil?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $\det A$ untuk A berbaris $(2,\ 1,\ 3)$, $(0,\ 4,\ 1)$ dan $(0,\ 0,\ 5)$.

Kunci: Matriks segitiga atas, sehingga determinannya hasil kali diagonal: $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$.

2. Tunjukkan bahwa G berbaris $(2,\ 4,\ 6)$, $(1,\ 2,\ 3)$ dan $(5,\ 1,\ 0)$ singular.

Kunci: Baris 1 adalah $2\times$ baris 2, sehingga eliminasi memberi baris nol dan $\det G = 0$ (dicek juga dengan kode). Maka G singular.

3. Bila A berukuran 4×4 dengan $\det A = 3$, tentukan $\det(2A)$, $\det A^{-1}$ dan $\det(A^t A)$.

Kunci: $\det(2A) = 2^4 \cdot 3 = 48$; $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$; $\det(A^t A) = \det A^t \det A = 3 \cdot 3 = 9$.

6.5 Matrix Factorization

Rujukan buku: halaman 400

Eliminasi Gauss mengubah A menjadi segitiga atas dengan serangkaian operasi baris. Gagasan faktorisasi matriks adalah merekam operasi-operasi itu sebagai matriks, sehingga hasil eliminasi dapat dipakai ulang. Bila eliminasi dapat dijalankan tanpa pertukaran baris, diperoleh faktorisasi $A = LU$ dengan L segitiga bawah dan U segitiga atas. Seksi ini menjelaskan bagaimana faktorisasi itu terbentuk, mengapa ia bermanfaat, dan bagaimana menanganinya bila pertukaran baris diperlukan.

Bayangkan langkah pertama eliminasi, yang menghapus entri di bawah a_{11}. Setiap baris i dikurangi $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ kali baris 1. Operasi ini sama dengan mengalikan A dari kiri dengan matriks segitiga bawah $M^{(1)}$ yang diagonalnya satu dan kolom pertamanya berisi $-m_{i1}$. Setelah $n-1$ langkah, $M^{(n-1)} \cdots M^{(1)} A = U$. Kebalikan setiap $M^{(k)}$ hanya mengubah tanda pengali, dan hasil kali kebalikan-kebalikan itu mengumpulkan semua pengali di bawah diagonal tanpa saling mengganggu. Jadi $L = (M^{(1)})^{-1} \cdots (M^{(n-1)})^{-1}$ adalah matriks segitiga bawah berdiagonal satu dengan entri $l_{ik} = m_{ik}$, dan $A = LU$. Inilah alasan faktorisasi LU dapat dibaca langsung dari pengali eliminasi tanpa menghitung apa pun tambahan.

Faktorisasi ini juga dapat dihitung langsung (tanpa menjalankan eliminasi) dengan mencocokkan entri pada $A = LU$. Untuk varian Doolittle dengan $l_{ii} = 1$, baris ke-k dari U dan kolom ke-k dari L ditentukan bergantian:

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj} \quad (j \geq k), \qquad l_{ik} = \tfrac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} \right) \quad (i > k)$$

Varian Crout memakai $u_{ii} = 1$ dan membiarkan diagonal L bebas. Secara umum, bila pilihan diagonal diberikan, faktorisasi bila ada akan tunggal. Syarat keberadaannya: $A = LU$ dengan L berdiagonal satu ada bila semua pivot u_{kk} taknol, yang ekuivalen dengan semua submatriks utama $k \times k$ (pojok kiri atas) bersifat nonsingular.

Manfaat utamanya terlihat saat menyelesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Karena $A = LU$, sistem itu menjadi dua sistem segitiga: pertama $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ diselesaikan dengan substitusi maju, kemudian $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dengan substitusi mundur. Faktorisasi sendiri memerlukan sekitar $\frac{n^3}{3}$ operasi, sedangkan setiap pasang substitusi hanya sekitar n^2. Jadi, bila matriks yang sama harus dipakai untuk banyak ruas kanan $\mathbf{b}$, faktorisasi dilakukan sekali dan tiap ruas kanan baru murah. Determinan pun tersedia gratis: $\det A = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$ bila L berdiagonal satu.

Bila pivot nol muncul, atau pivot kecil yang memperbesar galat, kita harus menukar baris. Semua pertukaran dapat dikumpulkan di depan sebagai matriks permutasi P (matriks identitas dengan baris-barisnya diacak). Untuk setiap matriks nonsingular, ada P sehingga $PA = LU$. Penyelesaian sistem berubah sedikit: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ menjadi $LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, jadi ruas kanan harus dipermutasi dulu sebelum substitusi maju. Matriks permutasi memenuhi $P^{-1} = P^t$, dan determinannya ± 1 menurut paritas jumlah pertukaran. Strategi pemilihan pivot untuk menentukan P dibahas di Seksi 6.2.

Faktorisasi LU adalah alat kerja standar di perangkat lunak numerik. Seksi berikutnya menunjukkan bahwa untuk kelas matriks khusus (berdominan diagonal, simetris definit positif, pita) faktorisasi ini lebih sederhana atau lebih hemat dan tidak memerlukan pertukaran baris.

Konsep kunci

Faktorisasi LU — Penulisan $A = LU$ dengan L segitiga bawah dan U segitiga atas. U adalah hasil eliminasi dan L menyimpan pengali eliminasi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Doolittle dan Crout — Doolittle mensyaratkan diagonal L bernilai 1; Crout mensyaratkan diagonal U bernilai 1. Kedua varian memberi hasil yang berbeda hanya dalam penskalaan diagonal.

Pengali eliminasi — Bilangan $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ yang menjadi entri l_{ik} pada L.

Dua substitusi segitiga — $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ diselesaikan lewat $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (maju) lalu $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (mundur), masing-masing sekitar $n^2/2$ operasi.

Matriks permutasi — Matriks yang didapat dengan mengacak baris I. Mengalikan PA menukar baris-baris A, dan $P^{-1} = P^t$.

Faktorisasi dengan pivoting — Untuk setiap A nonsingular ada P dengan $PA = LU$. Sistem diselesaikan dengan $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$ lalu $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Biaya — Faktorisasi sekitar $\frac{n^3}{3}$ operasi, tetapi sekali jadi dapat dipakai untuk banyak ruas kanan dengan biaya $O(n^2)$ tiap ruas.

Faktorisasi LU

$$A = LU, \qquad l_{ii} = 1 \ \text{(Doolittle)}$$

Baris ke-k dari U

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj}, \qquad j = k, \ \dots, n$$

Kolom ke-k dari L

$$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} \right), \qquad i = k+1, \ \dots, n$$

Penyelesaian sistem lewat LU

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Faktorisasi dengan permutasi dan determinan

$$PA = LU, \qquad \det A = (-1)^s \, u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$$

Algoritma: Faktorisasi LU (Doolittle) dan penyelesaian sistem

1. Untuk $k = 1, \ \dots, n$: hitung baris ke-k dari U dengan $u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s<k} l_{ks} u_{sj}$ untuk $j = k, \ \dots, n$.
2. Bila $u_{kk} = 0$, faktorisasi tanpa pertukaran gagal: tukar baris (pakai P) atau laporkan bahwa A singular.
3. Hitung kolom ke-k dari L dengan $l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s<k} l_{is} u_{sk} \right)$ untuk $i = k+1, \ \dots, n$ (dan $l_{kk} = 1$).
4. Substitusi maju: $y_1 = b_1$, lalu $y_i = b_i - \sum_{s<i} l_{is} y_s$ untuk $i = 2, \ \dots, n$.
5. Substitusi mundur: $x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$, lalu $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{s>i} u_{is} x_s \right)$ untuk $i = n-1, \ \dots, 1$.

Contoh 1: Faktorisasi LU matriks 3 kali 3

Faktorkan $A = LU$ (Doolittle) untuk A berbaris $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 5,\ 7)$ dan $(3,\ 8,\ 14)$.

Penyelesaian.

Eliminasi kolom 1: pengali $m_{21} = \frac{2}{1} = 2$ dan $m_{31} = \frac{3}{1} = 3$. Baris 2 menjadi $(0,\ 1,\ 1)$ dan baris 3 menjadi $(0,\ 2,\ 5)$.

Kolom 2: pengali $m_{32} = \frac{2}{1} = 2$. Baris 3 menjadi $(0,\ 0,\ 3)$.

Maka U berbaris $(1,\ 2,\ 3)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 0,\ 3)$ dan L berbaris $(1,\ 0,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 0)$, $(3,\ 2,\ 1)$.

Pemeriksaan untuk entri $(3,3)$: $l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 14 = a_{33}$. Seluruh hasil kali $LU = A$ juga telah dicek dengan kode. Determinannya $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$.

Contoh 2: Menyelesaikan sistem dengan LU

Dengan faktor L dan U dari contoh 1, selesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ untuk $\mathbf{b} = (5,\ 11,\ 23)^t$.

Penyelesaian.

Substitusi maju untuk $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$: $y_1 = 5$; $y_2 = 11 - 2 \cdot 5 = 1$; $y_3 = 23 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 6$. Jadi $\mathbf{y} = (5,\ 1,\ 6)^t$.

Substitusi mundur untuk $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$: $x_3 = \frac{6}{3} = 2$; $x_2 = 1 - 1 \cdot 2 = -1$; $x_1 = 5 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 1$.

Solusinya $\mathbf{x} = (1,\ -1,\ 2)^t$. Cek pada persamaan pertama: $1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5$. Cocok.

Contoh 3: Faktorisasi dengan matriks permutasi

Matriks A berbaris $(0,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$ dan $(2,\ 1,\ 3)$ memiliki $a_{11} = 0$. Cari P, L, U dengan $PA = LU$.

Penyelesaian.

Karena $a_{11} = 0$, tukar baris 1 dan 2. Matriks permutasi P yang melakukannya berbaris $(0,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$, sehingga PA berbaris $(1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 3)$.

Eliminasi pada PA: pengali $m_{21} = 0$ dan $m_{31} = 2$; baris 3 menjadi $(0,\ -1,\ 1)$. Kemudian $m_{32} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ dan baris 3 menjadi $(0,\ 0,\ \frac{3}{2})$.

Jadi U berbaris $(1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 2,\ 1)$, $(0,\ 0,\ \frac{3}{2})$ dan L berbaris $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(2,\ -\frac{1}{2},\ 1)$. Hasil kali $LU = PA$ telah dicek dengan kode.

Determinan: $\det A = (-1)^1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = -3$. Perhatikan bahwa P ini bukan satu-satunya pilihan; pivoting parsial akan memilih baris 3 lebih dulu dan menghasilkan faktor yang berbeda.

Kesalahan umum

• Memakai $A = LU$ padahal ada pivot nol di tengah proses tanpa menukar baris. Faktorisasi tanpa permutasi tidak selalu ada, bahkan untuk matriks nonsingular.

• Menulis pengali dengan tanda yang salah di L. Eliminasi mengurangkan $m_{ik} \times$ baris k, tetapi L menyimpan $+m_{ik}$ (tanda positif), bukan $-m_{ik}$.

• Lupa mempermutasi ruas kanan pada $PA = LU$. Sistem yang diselesaikan adalah $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$, bukan $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

• Menghitung A^{-1} lebih dulu padahal LU sudah ada. Dua substitusi segitiga jauh lebih murah dan lebih teliti.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa faktorisasi LU lebih menguntungkan daripada mengulang eliminasi Gauss bila ada banyak ruas kanan dengan matriks koefisien yang sama?
2. Mengapa pengali eliminasi dapat disimpan di bawah diagonal pada tempat yang semula memuat entri yang sudah dihapus? Apa keuntungannya bagi memori?
3. Apa hubungan antara kenonsingularan submatriks utama dan keberadaan $A = LU$? Berikan contoh matriks nonsingular yang tidak punya faktorisasi tanpa permutasi.

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Faktorkan A berbaris $(2,\ 1)$ dan $(6,\ 5)$ sebagai LU dengan diagonal L bernilai 1.

Kunci: $m_{21} = 3$. L berbaris $(1,\ 0)$, $(3,\ 1)$ dan U berbaris $(2,\ 1)$, $(0,\ 2)$. Cek: $3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$.

2. Dengan faktor dari soal 1, selesaikan $A\mathbf{x} = (4,\ 16)^t$.

Kunci: $y_1 = 4$, $y_2 = 16 - 3 \cdot 4 = 4$. Lalu $x_2 = \frac{4}{2} = 2$ dan $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$. Jadi $\mathbf{x} = (1,\ 2)^t$.

3. Faktorkan K berbaris $(4,\ 3,\ 2)$, $(8,\ 7,\ 7)$, $(12,\ 15,\ 17)$ lalu hitung $\det K$.

Kunci: Pengali $m_{21} = 2$, $m_{31} = 3$, $m_{32} = 6$. L berbaris $(1,\ 0,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 0)$, $(3,\ 6,\ 1)$ dan U berbaris $(4,\ 3,\ 2)$, $(0,\ 1,\ 3)$, $(0,\ 0,\ -7)$. $\det K = 4 \cdot 1 \cdot (-7) = -28$.

6.6 Special Types of Matrices

Rujukan buku: halaman 411

Eliminasi Gauss untuk matriks umum membutuhkan pemilihan pivot dan bisa memerlukan banyak penyimpanan. Seksi ini membahas beberapa kelas matriks yang strukturnya menjamin eliminasi berjalan aman tanpa pertukaran baris, atau yang bentuknya memungkinkan perhitungan jauh lebih hemat. Tiga kelas yang dibahas adalah matriks berdominansi diagonal, matriks simetris definit positif, dan matriks pita (khususnya tridiagonal).

Matriks A ($n \times n$) disebut berdominansi diagonal ketat bila untuk setiap baris i berlaku $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Dengan kata lain, entri diagonal setiap baris lebih besar (dalam nilai mutlak) daripada jumlah nilai mutlak entri lain pada baris itu. Matriks seperti ini selalu nonsingular. Lebih jauh, eliminasi Gauss dapat dijalankan tanpa pertukaran baris, dan galat pembulatannya terkendali, sehingga pivoting tidak diperlukan. Sifat ini sering muncul dari diskretisasi persamaan diferensial.

Matriks simetris A disebut definit positif bila $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ untuk setiap vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Matriks seperti ini nonsingular, entri diagonalnya positif, dan entri di luar diagonal dibatasi oleh $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$. Karakterisasi yang paling berguna untuk komputasi: matriks simetris adalah definit positif jika dan hanya jika semua minor utama pojok kiri atas, yaitu determinan submatriks $k \times k$ untuk $k = 1, \ldots, n$, bernilai positif (kriteria Sylvester). Ekuivalen pula, eliminasi Gauss tanpa pertukaran baris menghasilkan semua pivot positif, dan semua nilai eigennya positif. Perhatikan bahwa entri diagonal positif saja tidak cukup: A berbaris $(1,\ 2)$ dan $(2,\ 1)$ simetris dengan diagonal positif tetapi tidak definit positif, sebab untuk $\mathbf{x} = (1,\ -1)^t$ diperoleh $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = -2$.

Untuk matriks simetris definit positif, faktorisasi LU memiliki bentuk yang lebih rapi. Dengan D matriks diagonal berisi pivot, $A = LDL^t$ dengan L berdiagonal satu. Karena pivot positif, kita boleh membentuk $\tilde{L} = LD^{1/2}$ sehingga $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$, yang disebut faktorisasi Cholesky. Entri-entrinya dihitung dengan

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}, \qquad l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}l_{ks}\right) \quad (i > k)$$

Cholesky hanya menghitung satu faktor dan mengabaikan separuh matriks karena simetri, sehingga biayanya sekitar $\frac{n^3}{6}$ operasi, setengah dari LU biasa. Bonusnya, bilangan di bawah akar kuadrat selalu positif bila A definit positif, sehingga kegagalan akar (bilangan negatif atau nol) dapat dipakai sebagai uji praktis apakah matriks itu definit positif. Metode ini juga stabil tanpa pivoting.

Matriks pita memiliki entri taknol hanya di dekat diagonal: $a_{ij} = 0$ bila $j - i \geq q$ atau $i - j \geq p$. Kasus paling penting adalah tridiagonal ($p = q = 2$), dengan entri taknol hanya pada diagonal utama dan dua diagonal di sebelahnya. Faktor LU dari matriks pita mewarisi bentuk pita: untuk tridiagonal, L hanya punya diagonal utama dan subdiagonal, sedangkan U hanya punya diagonal utama (bernilai 1 pada varian Crout) dan superdiagonal. Akibatnya perhitungan hanya butuh $O(n)$ operasi dan $O(n)$ penyimpanan, jauh lebih hemat daripada $O(n^3)$. Jaminan keberadaan: bila matriks tridiagonal berdominansi diagonal ketat (atau memenuhi syarat serupa dengan superdiagonal dan subdiagonal taknol), faktorisasi Crout dapat dijalankan sampai selesai dan matriksnya nonsingular.

Ringkasnya, struktur matriks menentukan algoritma: kenali dominansi diagonal atau definit positif lebih dulu karena itu menghapus kebutuhan pivoting, dan manfaatkan pita untuk

Web by: Steven Paulus Siahaan

menghemat biaya. Seksi 6.5 memberi kerangka umum LU, sedangkan seksi ini menunjukkan kapan kerangka itu dapat dipangkas.

Konsep kunci

Dominansi diagonal ketat — $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ untuk setiap baris i. Menjamin nonsingular dan eliminasi stabil tanpa pertukaran baris.

Matriks definit positif — Matriks simetris dengan $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ untuk semua $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Nonsingular dengan diagonal positif dan $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$.

Kriteria minor utama — Matriks simetris definit positif tepat bila semua determinan submatriks pojok kiri atas $1 \times 1, \ \dots, n \times n$ positif (kriteria Sylvester).

Faktorisasi LDL^t dan Cholesky — $A = LDL^t$ dengan L berdiagonal satu dan D berisi pivot positif; mengambil akar D memberi $A = \tilde{L}\tilde{L}^t$.

Biaya Cholesky — Sekitar $\frac{n^3}{6}$ operasi, setengah biaya LU umum, karena simetri dimanfaatkan.

Matriks pita — Entri taknol hanya dalam pita sempit di sekitar diagonal. Faktor LU mewarisi struktur pita sehingga hemat waktu dan memori.

Matriks tridiagonal dan Crout — Entri taknol hanya pada tiga diagonal. Faktorisasi Crout dan kedua substitusi hanya butuh $O(n)$ operasi.

Dominansi diagonal ketat

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ \dots, n$$

Definit positif

$$A^t = A, \qquad \mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0 \ \text{ untuk semua } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Faktorisasi Cholesky

$$A = LL^t, \qquad l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}$$

Entri di bawah diagonal pada Cholesky

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}l_{ks}\right), \qquad i > k$$

Crout untuk tridiagonal

$$l_{11} = a_{11}, \quad u_{i,\,i+1} = \frac{a_{i,\,i+1}}{l_{ii}}, \quad l_{i+1,\,i+1} = a_{i+1,\,i+1} - a_{i+1,\,i}\,u_{i,\,i+1}$$

Algoritma: Faktorisasi Crout untuk sistem tridiagonal

1. Diberikan diagonal a_{ii}, subdiagonal $a_{i,\,i-1}$, superdiagonal $a_{i,\,i+1}$ dan ruas kanan b_i. Set $l_{11} = a_{11}$, $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$, $z_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$.

2. Untuk $i = 2,\ \dots, n-1$: $l_{ii} = a_{ii} - a_{i,\,i-1}u_{i-1,\,i}$, $u_{i,\,i+1} = \frac{a_{i,\,i+1}}{l_{ii}}$, $z_i = \frac{b_i - a_{i,\,i-1}z_{i-1}}{l_{ii}}$.
3. Untuk $i = n$: $l_{nn} = a_{nn} - a_{n,\,n-1}u_{n-1,\,n}$ dan $z_n = \frac{b_n - a_{n,\,n-1}z_{n-1}}{l_{nn}}$. Bila ada $l_{ii} = 0$, faktorisasi gagal.
4. Substitusi mundur: $x_n = z_n$, lalu $x_i = z_i - u_{i,\,i+1}x_{i+1}$ untuk $i = n-1,\ \dots, 1$.

Contoh 1: Uji dominansi diagonal dan definit positif

(a) Periksa apakah D berbaris $(5,\ -1,\ 2)$, $(1,\ 4,\ -1)$ dan $(0,\ 3,\ -6)$ berdominansi diagonal ketat. (b) Periksa apakah P berbaris $(2,\ -1,\ 0)$, $(-1,\ 2,\ -1)$, $(0,\ -1,\ 2)$ definit positif.

Penyelesaian.

(a) Baris 1: $|5| = 5 > |-1| + |2| = 3$. Baris 2: $|4| = 4 > |1| + |-1| = 2$. Baris 3: $|-6| = 6 > |0| + |3| = 3$. Ketiganya terpenuhi, jadi D berdominansi diagonal ketat dan karena itu nonsingular. (Matriks ini tidak simetris, sehingga pertanyaan definit positif tidak berlaku untuknya.)

(b) P simetris. Minor utama: $\det(2) = 2$; determinan dari baris $(2,\ -1)$ dan $(-1,\ 2)$ adalah $4 - 1 = 3$; dan $\det P = 2(4-1) - (-1)(-2-0) = 6 - 2 = 4$. Semuanya positif (dicek dengan kode), jadi P definit positif menurut kriteria Sylvester.

Contoh 2: Faktorisasi Cholesky dan penyelesaian sistem

Faktorkan $C = LL^t$ untuk C berbaris $(4,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 5,\ 3)$ dan $(2,\ 3,\ 6)$, lalu selesaikan $C\mathbf{x} = (6,\ 3,\ 11)^t$.

Penyelesaian.

Kolom 1: $l_{11} = \sqrt{4} = 2$, $l_{21} = \frac{2}{2} = 1$, $l_{31} = \frac{2}{2} = 1$.

Kolom 2: $l_{22} = \sqrt{5 - 1^2} = 2$, $l_{32} = \frac{3 - 1\cdot 1}{2} = 1$.

Kolom 3: $l_{33} = \sqrt{6 - 1^2 - 1^2} = 2$.

Jadi L berbaris $(2,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 2,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 2)$; $LL^t = C$ telah dicek dengan kode.

Substitusi maju untuk $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$: $y_1 = \frac{6}{2} = 3$; $y_2 = \frac{3 - 1\cdot 3}{2} = 0$; $y_3 = \frac{11 - 1\cdot 3 - 1\cdot 0}{2} = 4$.

Substitusi mundur untuk $L^t\mathbf{x} = \mathbf{y}$: $x_3 = \frac{4}{2} = 2$; $x_2 = \frac{0 - 1\cdot 2}{2} = -1$; $x_1 = \frac{3 - 1\cdot(-1) - 1\cdot 2}{2} = 1$.

Solusinya $\mathbf{x} = (1,\ -1,\ 2)^t$.

Contoh 3: Sistem tridiagonal dengan metode Crout

Selesaikan sistem 4×4 dengan diagonal utama semuanya 4, subdiagonal dan superdiagonal semuanya -1, dan ruas kanan $\mathbf{b} = (2,\ 4,\ 6,\ 13)^t$.

Penyelesaian.

Faktorisasi Crout (dihitung dengan pecahan eksak): $l_{11} = 4$ dan $u_{12} = -\frac{1}{4}$; $l_{22} = 4 - (-1)(-\frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$ dan $u_{23} = \frac{-1}{15/4} = -\frac{4}{15}$; $l_{33} = 4 - (-1)(-\frac{4}{15}) = \frac{56}{15}$ dan $u_{34} = -\frac{15}{56}$; $l_{44} = 4 - \frac{15}{56} = \frac{209}{56}$.

Substitusi maju: $z_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $z_2 = \frac{4 + \frac{1}{2}}{15/4} = \frac{6}{5}$; $z_3 = \frac{6 + \frac{6}{5}}{56/15} = \frac{27}{14}$; $z_4 = \frac{13 + \frac{27}{14}}{209/56} = 4$.

Substitusi mundur: $x_4 = 4$; $x_3 = \frac{27}{14} + \frac{15}{56} \cdot 4 = 3$; $x_2 = \frac{6}{5} + \frac{4}{15} \cdot 3 = 2$; $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$.

Solusinya $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)^t$, yang cocok dengan vektor yang dipakai untuk membentuk $\mathbf{b}$. Seluruh langkah memakai $O(n)$ operasi.

Kesalahan umum

• Mengira simetri dan diagonal positif sudah cukup untuk definit positif. Contoh $(1,\ 2;\ 2,\ 1)$ simetris dengan diagonal positif, tetapi $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$ untuk $\mathbf{x} = (1,\ -1)^t$.

• Memakai dominansi diagonal lemah ($\geq$) lalu menyimpulkan nonsingular. Dominansi ketat diperlukan untuk jaminan itu; matriks dengan kesamaan di semua baris bisa singular.

• Menerapkan Cholesky pada matriks tak simetris, atau tidak mengecek hasil di bawah akar. Bila ada nilai tak positif di bawah akar, matriks itu bukan definit positif.

• Menyimpan seluruh matriks $n \times n$ untuk sistem tridiagonal. Cukup tiga larik panjang n; menyimpan semua entri memboroskan memori dan waktu.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa dominansi diagonal ketat dan sifat definit positif membuat pivoting tidak diperlukan? Apa yang dijamin tentang pivot selama eliminasi?
2. Bagaimana faktorisasi Cholesky dapat dipakai sebagai uji komputasi untuk definit positif, dan mengapa itu lebih praktis daripada menghitung semua minor utama?
3. Mengapa faktor LU dari matriks pita tetap berpita, tetapi invers matriks pita pada umumnya penuh? Apa implikasinya bagi penyelesaian sistem pita?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Apakah A berbaris $(3,\ 2,\ 1)$, $(1,\ -3,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 4)$ berdominansi diagonal ketat?

Kunci: Baris 1: 3 lawan $2+1=3$, hanya sama sehingga tidak ketat. Baris 2: $3>2$ benar. Baris 3: 4 lawan $2+2=4$, tidak ketat. Jadi bukan dominan diagonal ketat.

2. Faktorkan A berbaris $(9,\ 3)$ dan $(3,\ 5)$ sebagai LL^t.

Kunci: $l_{11}=3$, $l_{21}=\frac{3}{3}=1$, $l_{22}=\sqrt{5-1}=2$. L berbaris $(3,\ 0)$ dan $(1,\ 2)$; cek: LL^t berbaris $(9,\ 3)$, $(3,\ 5)$.

3. Tunjukkan bahwa A berbaris $(1,\ 2)$ dan $(2,\ 1)$ tidak definit positif dengan dua cara.

Kunci: Cara 1: minor utama kedua $=1\cdot 1-2\cdot 2=-3<0$. Cara 2: $\mathbf{x}=(1,\ -1)^t$ memberi $\mathbf{x}^tA\mathbf{x}=1-2-2+1=-2<0$.

Pesan Utama

Ingat

Jangan pernah menghitung A^{-1} hanya untuk menyelesaikan satu sistem; faktorisasi lebih cepat dan lebih akurat.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan