MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 7

Teknik Iteratif dalam Aljabar Matriks

Iterative Techniques in Matrix Algebra

Halaman buku 431 – 495 • 7 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Ringkasan Bab

Untuk sistem besar dan jarang (sparse), metode iteratif sering lebih murah daripada eliminasi langsung. Bab ini mulai dengan norma vektor dan matriks serta jari-jari spektral, karena konvergensi iterasi $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ ditentukan oleh $\rho(T) < 1$.

Jacobi dan Gauss–Seidel memperbarui komponen satu per satu; SOR menambahkan parameter relaksasi ω untuk mempercepat. Perbaikan iteratif dan bilangan kondisi mengukur kepekaan solusi terhadap galat data, dan metode gradien konjugat memberi solusi (secara teori) dalam paling banyak n langkah untuk matriks definit positif.

Tujuan Pembelajaran

1. Menghitung norma $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ dan jari-jari spektral.
2. Menjalankan Jacobi, Gauss–Seidel, dan SOR serta menguji konvergensinya.
3. Menghitung bilangan kondisi dan menafsirkan batas galat.
4. Menjelaskan ide dasar gradien konjugat.

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
7.1	Norms of Vectors and Matrices	432	Def. 7.1; Def. 7.2; Teo. 7.3 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Inequality for Sums); Def. 7.4; Def. 7.5; Teo. 7.6; Teo. 7.7; Def. 7.8 ...; 5 contoh
7.2	Eigenvalues and Eigenvectors	443	Def. 7.12; Def. 7.13; Def. 7.14; Teo. 7.15; Def. 7.16; Teo. 7.17; 4 contoh
7.3	The Jacobi and Gauss-Seidel Iterative Techniques	450	Lema 7.18; Teo. 7.19; Kor. 7.20; Teo. 7.21; Teo. 7.22 (Stein-Rosenberg); 4 contoh
7.4	Relaxation Techniques for Solving Linear Systems	462	Def. 7.23; Teo. 7.24 (Kahan); Teo. 7.25 (Ostrowski-Reich); Teo. 7.26; 2 contoh
7.5	Error Bounds and Iterative Refinement	469	Teo. 7.27; Def. 7.28; Teo. 7.29; 3 contoh
7.6	The Conjugate Gradient Method	479	Teo. 7.30; Teo. 7.31; Teo. 7.32; Teo. 7.33; 3 contoh
7.7	Survey of Methods and Software	495	–

Rumus dan Metode Kunci

Norma tak hingga matriks

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Syarat konvergensi

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \text{ konvergen} \Leftrightarrow \rho(T) < 1$$

Jacobi

$$x_i^{(k)} = \tfrac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)}]$$

Gauss–Seidel

$$x_i^{(k)} = \tfrac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k-1)}]$$

SOR

$$x_i^{(k)} = (1-\omega) x_i^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k-1)}]$$

Bilangan kondisi dan galat relatif

$$K(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|, \qquad \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

7.1 Norms of Vectors and Matrices

Rujukan buku: halaman 432

Dalam analisis numerik kita sering membangun barisan vektor $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ yang diharapkan mendekati solusi sebuah sistem linear. Untuk menyatakan bahwa barisan itu "mendekati" sesuatu, kita memerlukan alat pengukur jarak antarvektor di R^n. Alat itu adalah norma, yaitu perumuman nilai mutlak pada bilangan real. Norma juga dibutuhkan untuk menilai mutu solusi dari metode langsung yang dihitung dengan aritmetika berhingga, karena solusi yang diperoleh hanyalah hampiran.

Norma vektor adalah fungsi $\|\cdot\|$ dari R^n ke bilangan real yang memenuhi empat sifat: tak negatif, bernilai nol hanya untuk vektor nol, homogen ($\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$), dan memenuhi ketaksamaan segitiga $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Dua norma yang paling sering dipakai adalah norma Euclid dan norma maksimum:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Norma $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ juga sah dan kadang berguna. Untuk norma maksimum, ketaksamaan segitiga mengalir langsung dari ketaksamaan segitiga nilai mutlak. Untuk norma Euclid kita memerlukan ketaksamaan Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, $|x^t y| \le \|x\|_2 \|y\|_2$, yang memberi $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2x^t y + \|y\|_2^2 \le (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$. Jarak antara dua vektor didefinisikan sebagai norma selisihnya, $\|x - y\|$.

Barisan $\{x^{(k)}\}$ dikatakan konvergen ke x terhadap norma $\|\cdot\|$ bila $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ untuk $k \to \infty$. Untuk norma maksimum ini sama dengan konvergen komponen demi komponen. Hasil penting berikutnya adalah kesetaraan norma: untuk setiap vektor,

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

Akibatnya barisan yang konvergen terhadap satu norma juga konvergen terhadap norma lainnya, dan semua norma pada R^n bersifat setara. Jadi kita bebas memilih norma yang paling mudah dihitung ketika membuktikan kekonvergenan, walaupun besar galat numeriknya bisa berbeda hingga faktor $\sqrt{n}$.

Untuk matriks $n \times n$ kita memerlukan norma matriks, yaitu fungsi dengan sifat yang sejajar dengan norma vektor ditambah sifat perkalian $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$. Cara paling berguna untuk membangunnya adalah norma alami (norma terinduksi), $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Norma ini menjamin $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$, sehingga ukuran matriks langsung mengendalikan seberapa besar A dapat memperbesar sebuah vektor. Dari norma $\|\cdot\|_\infty$ diperoleh norma baris, $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, yaitu jumlah mutlak baris terbesar. Dari norma $\|\cdot\|_2$ diperoleh $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$, dengan ρ jari-jari spektral yang dibahas di seksi berikutnya. Norma ini mahal dihitung, sedangkan norma baris sangat murah, sehingga norma baris sering dipakai sebagai batas praktis.

Norma Frobenius, $\|A\|_F = \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2\right)^{1/2}$, adalah norma matriks yang bukan norma terinduksi, tetapi mudah dihitung dan memenuhi $\|A\|_2 \le \|A\|_F$. Seksi ini menjadi dasar seluruh Bab 7: ukuran konvergensi metode iterasi (Seksi 7.3 dan 7.4) dan batas galat serta bilangan kondisi (Seksi 7.5) semuanya dinyatakan dengan norma.

Konsep kunci

Norma vektor — Fungsi $\|\cdot\|$ yang tak negatif, definit, homogen, dan memenuhi ketaksamaan segitiga. Ia mengukur panjang vektor dan memungkinkan definisi jarak $\|x - y\|$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Norma l_2 dan l_∞ — $\|x\|_2$ adalah panjang Euclid, sedangkan $\|x\|_\infty$ adalah komponen terbesar dalam nilai mutlak. Keduanya setara: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

Ketaksamaan Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz — $|x^t y| \le \|x\|_2 \|y\|_2$. Ketaksamaan ini dipakai untuk membuktikan ketaksamaan segitiga pada norma l_2.

Konvergensi barisan vektor — $x^{(k)} \to x$ bila $\|x^{(k)} - x\| \to 0$. Karena semua norma di R^n setara, konvergensi tidak bergantung pada pilihan norma.

Norma matriks alami — $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Norma ini memenuhi $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ dan $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

Norma baris dan norma spektral — $\|A\|_\infty$ adalah jumlah mutlak baris terbesar (murah dihitung), sedangkan $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$ memerlukan nilai eigen.

Norma Frobenius — Akar jumlah kuadrat semua elemen. Bukan norma terinduksi, tetapi memberi batas atas yang mudah untuk $\|A\|_2$.

Norma l_2 dan l_∞

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

Kesetaraan norma

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

Norma matriks alami

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|, \qquad \|Ax\| \le \|A\|\, \|x\|$$

Norma baris

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Norma spektral

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$$

Contoh 1: Norma dan jarak dua vektor

Diberikan $x=(1,2,-1,3)^t$ dan $y=(2,0,1,5)^t$. Hitung $\|x-y\|_2$ dan $\|x-y\|_\infty$, lalu periksa kesetaraan normanya.

Penyelesaian.

Selisihnya $x-y=(-1,2,-2,-2)^t$.

$$\|x-y\|_2=\sqrt{1+4+4+4}=\sqrt{13}\approx 3{,}6056, \qquad \|x-y\|_\infty=\max\{1,2,2,2\}=2$$

Periksa $\|\cdot\|_\infty\le\|\cdot\|_2\le\sqrt{n}\|\cdot\|_\infty$ dengan $n=4$: $2\le 3{,}6056\le 2\cdot 2=4$. Ketaksamaan terpenuhi.

Contoh 2: Empat norma matriks

Hitung $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ (jumlah mutlak kolom terbesar), $\|A\|_2$, dan $\|A\|_F$ untuk A dengan baris $(1,-2,0)$, $(3,1,-1)$, $(0,2,4)$.

Penyelesaian.

Jumlah mutlak baris: $3,\ 5,\ 6$, sehingga $\|A\|_\infty=6$. Jumlah mutlak kolom: $4,\ 5,\ 5$, sehingga $\|A\|_1=5$.

Untuk norma spektral hitung A^tA, yang barisnya $(10,1,-3)$; $(1,9,7)$; $(-3,7,17)$. Nilai eigennya (dihitung numerik) adalah $3{,}9652$, $10{,}5786$, $21{,}4563$. Maka $\|A\|_2=\sqrt{21{,}4563}\approx 4{,}6321$.

Norma Frobenius: $\|A\|_F=\sqrt{1+4+0+9+1+1+0+4+16}=\sqrt{36}=6{,}0000$. Terlihat $\|A\|_2=4{,}6321\le\|A\|_F=6$, dan $\|A\|_2\le\sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$ juga berlaku.

Contoh 3: Kecepatan konvergensi sebuah barisan vektor

Tunjukkan bahwa $x^{(k)}=\left(2+\frac{1}{k},\ 1-\frac{2}{k^2},\ \frac{4k}{k+1}\right)^t$ konvergen ke $x=(2,1,4)^t$ terhadap $\|\cdot\|_\infty$, dan cari k agar galatnya di bawah 10^{-3}.

Penyelesaian.

Selisihnya $x^{(k)}-x=\left(\frac{1}{k},\ -\frac{2}{k^2},\ -\frac{4}{k+1}\right)^t$, sehingga $\|x^{(k)}-x\|_\infty=\max\left\{\frac{1}{k},\frac{2}{k^2},\frac{4}{k+1}\right\}$. Setiap suku menuju 0, jadi barisan konvergen. Suku $\frac{4}{k+1}$ paling lambat, sehingga ia menentukan laju (untuk $k\ge 2$).

$k=1$: $\|x^{(k)}-x\|_\infty=2{,}00000$

$k=10$: $\|x^{(k)}-x\|_\infty=0{,}36364$

$k=100$: $\|x^{(k)}-x\|_\infty=0{,}03960$

$k=1000$: $\|x^{(k)}-x\|_\infty=0{,}00400$

$k=4000$: $\|x^{(k)}-x\|_\infty=0{,}00100$

Syarat $\frac{4}{k+1}<10^{-3}$ memberi $k>3999$. Jadi $k=4000$ cukup, sedangkan $k=1000$ belum cukup.

Kesalahan umum

• Menganggap $\|A\|_2$ sama dengan norma Frobenius atau dihitung dari akar elemen terbesar. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$, dan $\|A\|_F$ umumnya lebih besar.

• Memakai $\|A\|_\infty$ sebagai jumlah mutlak kolom. Norma baris menjumlahkan sepanjang baris; norma kolom ($\|A\|_1$) menjumlahkan sepanjang kolom.

• Menyimpulkan $\rho(A)$ sama dengan $\|A\|$ untuk sembarang matriks. Kesamaan hanya terjadi pada kasus khusus (misalnya $\|A\|_2$ untuk matriks simetris); umumnya $\rho(A) \le \|A\|$.

• Mengira dua norma menghasilkan galat yang sama besar. Konvergensinya setara, tetapi nilainya dapat berbeda hingga faktor $\sqrt{n}$, sehingga toleransi harus disebutkan beserta normanya.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa setara-nya semua norma di R^n membuat kita bebas memilih norma ketika menguji konvergensi, tetapi tidak bebas ketika menyatakan toleransi galat?
2. Mengapa norma Frobenius bukan norma terinduksi? (Petunjuk: hitung norma terinduksi dari matriks identitas.)
3. Mengapa $\|A\|_\infty$ lebih disukai untuk perhitungan praktis, padahal $\|A\|_2$ lebih "ketat"?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $\|u\|_2$ dan $\|u\|_\infty$ untuk $u = (3, -4, 12)^t$.

Kunci: $\|u\|_2 = \sqrt{9+16+144} = 13$ dan $\|u\|_\infty = 12$.

2. Untuk B dengan baris $(2, -1)$ dan $(4, 3)$, hitung $\|B\|_\infty$ dan $\|B\|_F$.

Kunci: $\|B\|_\infty = \max\{3, 7\} = 7$ dan $\|B\|_F = \sqrt{4+1+16+9} = \sqrt{30} \approx 5{,}4772$.

3. Buktikan $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ dan beri contoh vektor yang membuat kesamaan terjadi.

Kunci: Karena $x_i^2 \le \|x\|_\infty^2$ untuk setiap i, maka $\sum x_i^2 \le n\|x\|_\infty^2$. Kesamaan terjadi untuk $x = (1, 1, \ldots, 1)^t$.

4. Tunjukkan bahwa $x^{(k)} = \left(\frac{3}{k}, \frac{k}{k+2}\right)^t$ konvergen dan tentukan limitnya.

Kunci: Komponen pertama menuju 0 dan komponen kedua menuju 1, sehingga limitnya $(0, 1)^t$. Galat maksimum $\max\left\{\frac{3}{k}, \frac{2}{k+2}\right\} \to 0$.

Steven Paulus Siahaan

7.2 Eigenvalues and Eigenvectors

Rujukan buku: halaman 443

Seksi ini mengumpulkan beberapa fakta aljabar linear yang diperlukan untuk menganalisis metode iterasi. Misalkan A matriks $n \times n$. Bilangan λ disebut nilai eigen bila ada vektor tak nol x (vektor eigen) sehingga $Ax = \lambda x$. Karena itu $(A - \lambda I)x = 0$ memiliki solusi tak trivial, yang terjadi tepat ketika $\det(A - \lambda I) = 0$. Ruas kiri ini adalah polinom derajat n dalam λ, yaitu polinom karakteristik, sehingga A memiliki tepat n nilai eigen bila dihitung dengan kelipatan dan boleh bernilai kompleks.

Besaran terpenting bagi kita adalah jari-jari spektral, yaitu nilai eigen terbesar dalam modulus:

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \text{ nilai eigen dari } A\right\}$$

Besaran ini menggambarkan seberapa besar A dapat memperbesar vektor secara jangka panjang. Hubungannya dengan norma sangat erat. Untuk setiap norma matriks alami berlaku $\rho(A) \le \|A\|$. Buktinya sederhana: jika $Ax = \lambda x$ dengan $\|x\| = 1$, maka $|\lambda| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\|$. Jadi setiap norma alami adalah batas atas yang murah bagi jari-jari spektral. Sebaliknya, $\rho(A)$ dapat jauh lebih kecil daripada $\|A\|$, terutama untuk matriks tak simetris.

Hubungan kedua yang telah kita pakai di Seksi 7.1 adalah rumus norma spektral $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^{\,t}A)}$. Matriks $A^{\,t}A$ simetris dan semidefinit positif, sehingga nilai eigennya real dan tak negatif, dan akar terbesarnya memberi $\|A\|_2$. Bila A sendiri simetris, nilai eigen $A^{\,t}A = A^{\,2}$ adalah kuadrat nilai eigen A, sehingga $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Konsep sentral seksi ini adalah matriks konvergen. Matriks A disebut konvergen bila $\lim_{k\to\infty} (A^{\,k})_{ij} = 0$ untuk semua i, j. Beberapa pernyataan berikut setara: (i) A konvergen; (ii) $\lim_{k\to\infty} \|A^{\,k}\| = 0$ untuk suatu (dan akibatnya untuk setiap) norma alami; (iii) $\rho(A) < 1$; (iv) $A^{\,k}x \to 0$ untuk setiap vektor x. Fakta ini sangat penting karena galat metode iterasi linear berevolusi seperti $e^{(k)} = T^k e^{(0)}$, sehingga metode konvergen untuk semua tebakan awal tepat ketika T konvergen, yakni $\rho(T) < 1$. Bila ada satu norma alami dengan $\|T\| < 1$, hal itu cukup (tetapi tidak perlu) untuk menjamin $\rho(T) < 1$.

Perhatikan perbedaan antara “cukup” dan “perlu”. Kondisi $\rho(T) < 1$ perlu dan cukup, sedangkan $\|T\| < 1$ untuk norma tertentu hanya cukup. Pada matriks tak normal, norma $\|T^k\|$ dapat naik dahulu sebelum akhirnya turun, sehingga galat iterasi dapat membesar sementara di awal walaupun akhirnya konvergen. Dua fakta lain yang berguna: vektor eigen untuk nilai eigen yang berbeda saling bebas linear, dan matriks simetris memiliki nilai eigen real dengan vektor eigen yang dapat dipilih ortogonal. Matriks simetris positif definit memiliki semua nilai eigen positif, sifat yang akan dipakai pada metode relaksasi dan gradien konjugat.

Konsep kunci

Nilai eigen dan vektor eigen — Pasangan (λ, x) dengan $x \neq 0$ dan $Ax = \lambda x$. Nilai eigen adalah akar polinom karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$.

Polinom karakteristik — Polinom derajat n dalam λ, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Jumlah akarnya (dengan kelipatan) sama dengan n, dan jumlah nilai eigen sama dengan jejak A.

Jari-jari spektral — $\rho(A) = \max|\lambda|$ atas semua nilai eigen. Ukuran ini menentukan perilaku $A^{\,k}$ untuk k besar.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Hubungan norma dan jari-jari spektral — Untuk setiap norma alami, $\rho(A) \le \|A\|$. Untuk matriks simetris, $\|A\|_2 = \rho(A)$; secara umum $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^{\,t}A)}$.

Matriks konvergen — Matriks dengan $A^{\,k} \to 0$. Setara dengan $\rho(A) < 1$ dan dengan $A^{\,k}x \to 0$ untuk setiap x.

Kecukupan versus keperluan — $\|A\| < 1$ pada suatu norma alami cukup untuk konvergensi, tetapi tidak perlu. Syarat yang perlu dan cukup adalah $\rho(A) < 1$.

Matriks simetris positif definit — Matriks simetris dengan $x^{\,t}Ax > 0$ untuk $x \neq 0$; ekuivalen dengan semua nilai eigennya positif.

Persamaan karakteristik

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Jari-jari spektral

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

Batas atas oleh norma alami

$$\rho(A) \le \|A\|$$

Norma spektral

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^{\,t}A)}$$

Syarat matriks konvergen

$$\lim_{k \to \infty} A^{\,k} = 0 \iff \rho(A) < 1$$

Contoh 1: Nilai dan vektor eigen matriks tridiagonal simetris

Tentukan nilai eigen, vektor eigen, dan $\rho(A)$ untuk A dengan baris $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$.

Penyelesaian.

Dengan $\mu = 2 - \lambda$, $\det(A - \lambda I) = \mu^3 - 2\mu = \mu(\mu^2 - 2)$, sehingga $\mu = 0, \pm\sqrt{2}$ dan nilai eigennya

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4142, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}5858$$

Vektor eigennya (dikalikan konstanta sembarang): untuk λ_1, $(1, \sqrt{2}, 1)^t$; untuk λ_2, $(1, 0, -1)^t$; untuk λ_3, $(1, -\sqrt{2}, 1)^t$. Pemeriksaan untuk λ_2: $A(1, 0, -1)^t = (2, 0, -2)^t = 2(1, 0, -1)^t$. Ketiga vektor ortogonal, sesuai sifat matriks simetris.

Jari-jari spektralnya $\rho(A) = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4142$. Karena A simetris, $\|A\|_2 = \rho(A) = 3{,}4142$ (dihitung numerik), sedangkan $\|A\|_\infty = 4 \ge \rho(A)$.

Contoh 2: Matriks konvergen walau norma barisnya lebih dari 1

Matriks B memiliki baris $(0{,}5;\ 3)$ dan $(0;\ 0{,}6)$. Tunjukkan bahwa B konvergen walaupun $\|B\|_\infty > 1$, dan amati $\|B^k\|_\infty$.

Penyelesaian.

B segitiga atas, sehingga nilai eigennya adalah elemen diagonal $0{,}5$ dan $0{,}6$, jadi $\rho(B) = 0{,}6 < 1$ dan B konvergen. Namun $\|B\|_\infty = \max\{3{,}5;\ 0{,}6\} = 3{,}5 > 1$, jadi norma baris tidak dapat dipakai sebagai bukti. Hasil perhitungan:

$k = 1$: $\|B^k\|_\infty = 3{,}5000$

$k = 2$: $\|B^k\|_\infty = 3{,}5500$

$k = 3$: $\|B^k\|_\infty = 2{,}8550$

$k = 4$: $\|B^k\|_\infty = 2{,}0755$

$k = 5$: $\|B^k\|_\infty = 1{,}4265$

$k = 8$: $\|B^k\|_\infty = 0{,}3906$

$k = 12$: $\|B^k\|_\infty = 0{,}0582$

Norma $\|B^k\|_\infty$ naik dahulu dari 3,500 hingga puncak 3,550 pada $k = 2$, lalu turun menuju nol; pada $k = 40$ nilainya hanya sekitar $4{,}0 \times 10^{-8}$. Jadi $\rho(B) < 1$ menjamin konvergensi, tetapi galat dapat membesar sementara di awal.

Contoh 3: Jari-jari spektral dan norma l_2 matriks tak simetris

Untuk D dengan baris $(1, 2)$ dan $(3, 0)$, hitung $\rho(D)$ dan $\|D\|_\infty$, dan periksa $\rho(D) \le \|D\|$.

Penyelesaian.

Persamaan karakteristik: $\det(D - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$, sehingga $\lambda = 3$ dan $\lambda = -2$, dan $\rho(D) = 3$. Norma baris: $\|D\|_\infty = \max\{3, 3\} = 3$. Di sini $\rho(D) = \|D\|_\infty$, jadi batas $\rho \le \|\cdot\|$ bisa tajam. Untuk norma l_2: $D^t D$ memiliki baris $(10, 2)$ dan $(2, 4)$ dengan nilai eigen $7 \pm \sqrt{13}$, sehingga $\|D\|_2 = \sqrt{7 + \sqrt{13}} \approx 3{,}2566$, yang juga lebih besar dari $\rho(D) = 3$.

Kesalahan umum

• Menyimpulkan metode iterasi tidak konvergen hanya karena $\|T\| \ge 1$. Norma yang besar tidak membuktikan apa-apa; yang menentukan adalah $\rho(T)$.

• Menganggap $\rho(A)$ adalah norma matriks. ρ tidak memenuhi ketaksamaan segitiga (matriks bukan nol dapat memiliki $\rho = 0$), sehingga ia bukan norma.

• Menukar $\|A\|_2$ dengan $\rho(A)$ untuk matriks tak simetris. Rumus yang benar adalah $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$.

• Lupa bahwa nilai eigen boleh kompleks. Jari-jari spektral memakai modulus, $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ untuk $\lambda = a + bi$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $\rho(A) \le \|A\|$ untuk setiap norma alami, tetapi tidak ada norma alami yang selalu sama dengan $\rho(A)$?
2. Bila $\rho(T) < 1$ tetapi $\|T\|_\infty > 1$, apa yang terjadi pada galat iterasi $e^{(k)} = T^k e^{(0)}$ di langkah-langkah awal?
3. Mengapa matriks simetris lebih “baik hati” daripada matriks tak simetris ketika kita menaksir laju konvergensi dengan norma?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Cari nilai eigen A yang berbaris $(4, 1)$ dan $(2, 3)$ serta $\rho(A)$.

Kunci: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ sehingga $\lambda = 5, 2$ dan $\rho(A) = 5$.

2. Apakah T dengan baris $(0{,}3;\ 0{,}6)$ dan $(0{,}2;\ 0{,}1)$ konvergen?

Kunci: Ya. $\|T\|_\infty = \max\{0{,}9;\ 0{,}3\} = 0{,}9 < 1$, jadi $\rho(T) \le 0{,}9 < 1$ (nilai eigen sebenarnya sekitar $0.5606 + 0.0000j$ dan $-0.1606 + 0.0000j$).

3. Apakah S dengan baris $(1;\ 1)$ dan $(0;\ 0{,}5)$ konvergen?

Kunci: Tidak. Nilai eigennya 1 dan $0{,}5$, sehingga $\rho(S) = 1$, bukan di bawah 1. (Pangkat S^k tidak menuju nol.)

4. Buktikan bahwa untuk matriks simetris A berlaku $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Kunci: Nilai eigen $A^t A = A^2$ adalah λ_i^2, sehingga $\rho(A^2) = \rho(A)^2$ dan $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$.

Web by: Steven P

7.3 The Jacobi and Gauss-Seidel Iterative Techniques

Rujukan buku: halaman 450

Metode langsung seperti eliminasi Gauss menyelesaikan $Ax = b$ dengan jumlah operasi yang tumbuh sebagai n^3. Untuk sistem besar dengan banyak elemen nol, misalnya hasil diskretisasi persamaan diferensial parsial, metode iterasi sering jauh lebih hemat. Metode iterasi membangun barisan $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ dari tebakan awal $x^{(0)}$ dan berharap barisan itu mendekati solusi. Setiap langkah hanya memerlukan satu perkalian matriks-vektor yang murah bila A jarang (sparse).

Ide dasarnya adalah menulis ulang $Ax = b$ menjadi bentuk titik tetap $x = Tx + c$, lalu mengiterasikan $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$. Untuk membuat T, pecah $A = D - L - U$, dengan D bagian diagonal, $-L$ bagian segitiga bawah murni, dan $-U$ bagian segitiga atas murni. Dengan syarat $a_{ii} \neq 0$ untuk semua i, metode Jacobi memakai semua komponen iterasi lama pada ruas kanan:

$$x_i^{(k)} = \tfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right), \qquad T_j = D^{-1}(L+U), \quad c_j = D^{-1}b$$

Metode Gauss-Seidel memperbaikinya: begitu $x_i^{(k)}$ dihitung, nilai baru itu langsung dipakai untuk komponen berikutnya dalam sapuan yang sama,

$$x_i^{(k)} = \tfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right), \qquad T_g = (D-L)^{-1}U, \quad c_g = (D-L)^{-1}b$$

Jacobi mudah diparalelkan karena semua komponen baru bergantung hanya pada iterasi lama, dan tidak peduli urutan komponen. Gauss-Seidel biasanya konvergen lebih cepat dan hanya membutuhkan satu vektor penyimpanan, tetapi hasilnya bergantung pada urutan persamaan.

Teori konvergensi seragam untuk semua iterasi linear $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$: galat $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ memenuhi $e^{(k)} = T^k e^{(0)}$. Maka iterasi konvergen ke solusi untuk setiap $x^{(0)}$ tepat ketika $\rho(T) < 1$ (hasil Seksi 7.2). Bila $\|T\| < 1$ untuk suatu norma alami, kita juga mendapat batas galat $\|x - x^{(k)}\| \le \|T\|^k \|x - x^{(0)}\|$ dan $\|x - x^{(k)}\| \le \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$. Makin kecil $\rho(T)$, makin cepat konvergensinya.

Syarat yang mudah dicek adalah dominansi diagonal ketat: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ untuk setiap baris. Bila syarat ini terpenuhi, Jacobi dan Gauss-Seidel konvergen untuk sembarang tebakan awal, karena untuk Jacobi $\|T_j\|_\infty < 1$. Syarat ini cukup, bukan perlu. Ada juga hasil perbandingan (Stein-Rosenberg): bila $a_{ij} \le 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ii} > 0$, maka tepat satu dari ini benar: kedua metode konvergen dengan $\rho(T_g) < \rho(T_j) < 1$; atau keduanya divergen dengan $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$; atau keduanya memiliki jari-jari spektral 0 atau 1 yang sama. Jadi pada kelas matriks itu, Gauss-Seidel tidak pernah lebih buruk. Namun pada umumnya tidak ada urutan tetap: ada sistem yang Jacobi-nya konvergen tetapi Gauss-Seidel-nya tidak, dan sebaliknya.

Metode-metode ini adalah titik awal bagi metode relaksasi (Seksi 7.4) yang mempercepat Gauss-Seidel dengan satu parameter. Mereka juga sering dipakai sebagai pra-pengondisi (Seksi 7.6) atau penghalus pada metode multigrid.

Konsep kunci

Metode iterasi linear stasioner — Iterasi $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ dengan T dan c tetap. Solusi $Ax = b$ adalah titik tetapnya.

Pemecahan $A = D - L - U$ — D diagonal A, $-L$ bagian bawah murni, $-U$ bagian atas murni. Semua metode seksi ini dibangun dari pemecahan ini.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Metode Jacobi — Setiap komponen baru dihitung dari iterasi lama saja: $T_j = D^{-1}(L+U)$. Mudah diparalelkan.

Metode Gauss-Seidel — Komponen yang baru dihitung langsung dipakai dalam sapuan yang sama: $T_g = (D-L)^{-1}U$. Umumnya lebih cepat daripada Jacobi.

Syarat konvergensi — Konvergen untuk semua $x^{(0)}$ tepat bila $\rho(T) < 1$. Cukup bila $\|T\| < 1$ untuk suatu norma alami.

Dominansi diagonal ketat — $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ untuk semua i. Menjamin kekonvergenan Jacobi dan Gauss-Seidel.

Batas galat iterasi — Bila $\|T\| < 1$: $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$. Menaksir banyak iterasi tanpa tahu solusi.

Teorema Stein-Rosenberg — Untuk $a_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$ dan $a_{ii} > 0$, Jacobi dan Gauss-Seidel konvergen bersama atau divergen bersama, dan Gauss-Seidel lebih baik.

Jacobi, per komponen

$$x_i^{(k)} = \tfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

Gauss-Seidel, per komponen

$$x_i^{(k)} = \tfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right)$$

Matriks iterasi

$$T_j = D^{-1}(L+U)$$

$$T_g = (D-L)^{-1}U$$

Galat iterasi

$$x - x^{(k)} = T^k\,(x - x^{(0)})$$

Batas galat a posteriori

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Algoritma: Gauss-Seidel

1. Masukkan A, b, tebakan awal $x^{(0)}$, toleransi ε, dan batas iterasi N. Pastikan $a_{ii} \neq 0$ (tukar baris bila perlu).
2. Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$ kerjakan langkah 3-5.
3. Untuk $i = 1, \ldots, n$: hitung $x_i = \tfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{\text{lama}}\right)$, memakai nilai baru untuk $j < i$.
4. Jika $\|x - x^{\text{lama}}\| < \varepsilon$ (atau galat relatif), keluarkan x dan berhenti.
5. Simpan $x^{\text{lama}} \leftarrow x$ dan lanjutkan. Bila N iterasi habis, laporkan kegagalan mencapai toleransi.

6. Untuk Jacobi, ganti langkah 3 dengan penggunaan seluruh x^{lama} pada ruas kanan, dan simpan vektor baru terpisah.

Contoh 1: Jacobi dan Gauss-Seidel pada sistem 3x3

Selesaikan $6x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$, $x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4$, $-x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8$ dengan tebakan awal $x^{(0)} = 0$. Solusi eksaknya $(1, 1, 1)^t$. Matriks ini dominan diagonal ketat.

Penyelesaian.

Rumus Jacobi: $x_1 = \frac{5 + 2x_2 - x_3}{6}$, $x_2 = \frac{4 - x_1 + 2x_3}{5}$, $x_3 = \frac{8 + x_1 - 2x_2}{7}$. Empat iterasi pertama Jacobi:

$k = 1$: $x^{(k)} = (0{,}83333;\ 0{,}80000;\ 1{,}14286)^t$

$k = 2$: $x^{(k)} = (0{,}90952;\ 1{,}09048;\ 1{,}03333)^t$

$k = 3$: $x^{(k)} = (1{,}02460;\ 1{,}03143;\ 0{,}96122)^t$

$k = 4$: $x^{(k)} = (1{,}01694;\ 0{,}97957;\ 0{,}99454)^t$

Gauss-Seidel memakai rumus yang sama tetapi dengan nilai terbaru. Empat iterasi pertama:

$k = 1$: $x^{(k)} = (0{,}83333;\ 0{,}63333;\ 1{,}08095)^t$

$k = 2$: $x^{(k)} = (0{,}86429;\ 1{,}05952;\ 0{,}96361)^t$

$k = 3$: $x^{(k)} = (1{,}02591;\ 0{,}98026;\ 1{,}00934)^t$

$k = 4$: $x^{(k)} = (0{,}99186;\ 1{,}00536;\ 0{,}99731)^t$

Dengan kriteria galat relatif $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < 10^{-4}$, Jacobi memerlukan 12 iterasi dan Gauss-Seidel 9 iterasi. Gauss-Seidel lebih cepat (jumlah iterasinya lebih sedikit), sesuai dugaan $\rho(T_g) < \rho(T_j)$.

Contoh 2: Jari-jari spektral dan batas galat

Untuk sistem di atas, hitung $\rho(T_j)$, $\rho(T_g)$, dan gunakan $\|T_j\|_\infty$ untuk menaksir banyak iterasi Jacobi agar galat awal $\|x - x^{(0)}\|_\infty = 1$ menjadi di bawah 10^{-4}.

Penyelesaian.

Nilai eigen T_j dan T_g dihitung numerik: $\rho(T_j) \approx 0{,}4548$ dan $\rho(T_g) \approx 0{,}2819$. Keduanya di bawah 1, sehingga kedua metode konvergen, dan $\rho(T_g) < \rho(T_j)$.

Baris T_j memiliki jumlah mutlak $\frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}$, sehingga $\|T_j\|_\infty = 0{,}6000$. Batas $\|x - x^{(k)}\|_\infty \le (0{,}6)^k \cdot 1 < 10^{-4}$ memerlukan $k > \frac{4}{-\log_{10} 0{,}6} = 18{,}03$, yaitu $k = 19$. Batas ini lebih pesimistis daripada jumlah iterasi sebenarnya (12), karena norma $\|T_j\|_\infty$ lebih besar daripada $\rho(T_j)$.

Contoh 3: Hubungan $\rho(T_g) = \rho(T_j)^2$ pada kasus khusus

Tentukan T_j, T_g dan jari-jari spektral keduanya untuk A dengan baris $(2, 1)$ dan $(1, 2)$.

Penyelesaian.

$D = 2I$, L dan U masing-masing hanya memuat -1 di posisi bawah dan atas. Maka T_j memiliki baris $(0, \ -\frac{1}{2})$ dan $(-\frac{1}{2}, \ 0)$ dengan nilai eigen $\pm\frac{1}{2}$, jadi $\rho(T_j) = 0{,}50$. Untuk Gauss-Seidel, $T_g = (D - L)^{-1}U$ memiliki baris $(0, \ -\frac{1}{2})$ dan $(0, \ \frac{1}{4})$, dengan nilai eigen 0 dan $\frac{1}{4}$, jadi $\rho(T_g) = 0{,}25 = \rho(T_j)^2$. Pada matriks tridiagonal dengan syarat tertentu (Seksi 7.4) Gauss-Seidel menyelesaikan tugas yang sama dalam kira-kira setengah iterasi Jacobi.

Kesalahan umum

• Memakai nilai lama pada Gauss-Seidel (menjadikannya Jacobi) atau memakai nilai baru pada Jacobi. Pada Jacobi seluruh vektor lama dipakai penuh dalam satu iterasi.

• Mengira dominansi diagonal diperlukan. Itu hanya syarat cukup; sistem tidak dominan diagonal pun bisa konvergen bila $\rho(T) < 1$.

• Memulai iterasi tanpa menukar baris ketika $a_{ii} = 0$ atau sangat kecil. Pembagian dengan a_{ii} gagal atau memperbesar galat.

• Menghentikan iterasi ketika selisih dua iterasi kecil padahal laju konvergensi sangat lambat ($\rho(T)$ dekat 1). Selisih kecil tidak berarti galat kecil: galat bisa sekitar selisih dikali $\frac{1}{1-\rho}$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa iterasi $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ konvergen untuk semua tebakan awal tepat ketika $\rho(T) < 1$, bukan ketika $\|T\| < 1$?
2. Dalam kondisi apa Jacobi lebih unggul daripada Gauss-Seidel walaupun Gauss-Seidel umumnya lebih cepat?
3. Bagaimana mengubah urutan persamaan dapat memengaruhi konvergensi Gauss-Seidel, dan mengapa tidak berpengaruh pada Jacobi?
4. Untuk apa metode iterasi dipilih daripada eliminasi Gauss pada sistem berukuran jutaan variabel?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Satu langkah Jacobi dan Gauss-Seidel dari $x^{(0)} = 0$ untuk $4x_1 + x_2 = 6$, $2x_1 + 5x_2 = 12$ (solusi $(1, 2)^t$).

Kunci: Jacobi: $x^{(1)} = (1{,}50;\ 2{,}40)^t$. Gauss-Seidel: $x_1 = 1{,}50$, $x_2 = \frac{12 - 2 \cdot 1{,}5}{5} = 1{,}80$, jadi $x^{(1)} = (1{,}50;\ 1{,}80)^t$.

2. Apakah A dengan baris $(3, \ -1, 1)$, $(1, 4, \ -2)$, $(0, 1, 2)$ dominan diagonal ketat?

Kunci: Baris 1: $3 > 2$. Baris 2: $4 > 3$. Baris 3: $2 > 1$. Ya, dominan diagonal ketat sehingga Jacobi dan Gauss-Seidel konvergen.

3. Untuk A dengan baris $(1, 2)$ dan $(3, 1)$, tunjukkan Jacobi divergen.

Kunci: T_j memiliki baris $(0,\ -2)$ dan $(-3, 0)$ dengan $\lambda^2 = 6$, jadi $\rho(T_j) = \sqrt{6} \approx 2{,}449 > 1$. Jacobi divergen untuk hampir semua tebakan awal (bila urutan baris ditukar, sistem menjadi dominan diagonal dan konvergen).

4. Dari batas $\frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$, bila $\|T\| = 0{,}5$ dan $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = 1$, berapa k agar batas $< 10^{-3}$?

Kunci: $\frac{0{,}5^k}{0{,}5} < 10^{-3}$ sehingga $0{,}5^{k-1} < 10^{-3}$, $k - 1 > \log_2 1000 \approx 9{,}97$, jadi $k = 11$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

7.4 Relaxation Techniques for Solving Linear Systems

Rujukan buku: halaman 462

Gauss-Seidel dapat dilihat sebagai langkah koreksi: untuk komponen ke-i kita menghitung nilai yang “seharusnya”, lalu mengganti nilai lama dengannya. Metode relaksasi (SOR, Successive Over-Relaxation) menambahkan satu parameter ω yang mengatur seberapa jauh kita bergerak menuju nilai itu. Bila $\hat{x}_i$ adalah nilai Gauss-Seidel, SOR memakai $x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \omega\hat{x}_i$, yaitu kombinasi berbobot antara nilai lama dan nilai Gauss-Seidel.

Secara lengkap, untuk $i = 1, \ldots, n$,

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)$$

Dengan pemecahan $A = D - L - U$ seperti di Seksi 7.3, bentuk matriksnya adalah $(D-\omega L)x^{(k)} = [(1-\omega)D + \omega U]x^{(k-1)} + \omega b$, atau $x^{(k)} = T_\omega x^{(k-1)} + c_\omega$ dengan $T_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$. Untuk $\omega = 1$ kita kembali ke Gauss-Seidel. Pilihan $0 < \omega < 1$ disebut under-relaxation dan dapat membantu bila Gauss-Seidel berosilasi atau divergen. Pilihan $1 < \omega < 2$ disebut over-relaxation dan dipakai untuk mempercepat sistem yang sudah konvergen tetapi lambat.

Seberapa besar ω boleh dipilih? Teorema Kahan menjawab: bila $a_{ii} \neq 0$ untuk semua i, maka $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. Jadi SOR dapat konvergen hanya bila $0 < \omega < 2$. Sebaliknya, teorema Ostrowski-Reich menjamin bahwa bila A simetris positif definit dan $0 < \omega < 2$, maka SOR konvergen untuk sembarang tebakan awal. Kelas matriks simetris positif definit, yang sering muncul dari diskretisasi masalah fisis, adalah tempat SOR paling aman dipakai.

Hasil terkuat berlaku untuk matriks tridiagonal. Bila A tridiagonal, simetris, dan positif definit, maka $\rho(T_g) = \rho(T_j)^2 < 1$, dan nilai ω yang meminimumkan $\rho(T_\omega)$ adalah

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}, \qquad \rho(T_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1$$

Perhatikan bahwa ω_{opt} ditentukan oleh $\rho(T_j)$. Bila $\rho(T_j)$ mendekati 1 (sistem besar dan sulit), ω_{opt} mendekati 2 dan keuntungan SOR dibanding Gauss-Seidel menjadi sangat besar: banyak iterasi dapat turun dari orde n^2 menjadi orde n pada masalah Poisson satu dan dua dimensi. Untuk matriks umum, ω_{opt} biasanya tidak diketahui dan dicari dengan percobaan atau dengan taksiran adaptif. Grafik $\rho(T_\omega)$ terhadap ω turun tajam menuju ω_{opt} lalu naik lebih curam lagi sesudahnya, sehingga lebih aman memilih ω sedikit di atas taksiran daripada di bawahnya.

Algoritme SOR tidak jauh lebih rumit daripada Gauss-Seidel, hanya dengan satu perkalian tambahan per komponen. Kriteria berhenti seperti pada Seksi 7.3 tetap dipakai. Dalam praktik SOR kini lebih sering menjadi pra-pengondisi atau penghalus ketimbang penyelesai tunggal, tetapi ia memberi contoh yang bersih bagaimana satu parameter dapat mengubah laju konvergensi secara dramatis.

Konsep kunci

Faktor relaksasi ω — Parameter yang mencampur nilai lama dan nilai Gauss-Seidel: $x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \omega\hat{x}_i$. Nilai $\omega = 1$ memberi Gauss-Seidel.

Under- dan over-relaxation — $0 < \omega < 1$ meredam langkah (stabilisasi), $1 < \omega < 2$ memperbesar langkah (percepatan).

Matriks iterasi SOR — $T_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$. Konvergensi bergantung pada $\rho(T_\omega)$.

Teorema Kahan — Jika $a_{ii} \neq 0$ maka $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$, sehingga konvergensi memerlukan $0 < \omega < 2$.

Teorema Ostrowski-Reich — Jika A simetris positif definit dan $0 < \omega < 2$, SOR konvergen untuk sembarang tebakan awal.

Faktor optimal — Untuk A tridiagonal simetris positif definit, $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}$ dan $\rho(T_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1$.

Hubungan Jacobi dan Gauss-Seidel — Pada kelas tridiagonal tersebut, $\rho(T_g) = \rho(T_j)^2$: Gauss-Seidel kira-kira dua kali lebih cepat daripada Jacobi.

SOR per komponen

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \tfrac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)$$

Bentuk matriks

$$(D - \omega L)x^{(k)} = [(1-\omega)D + \omega U]x^{(k-1)} + \omega b$$

Matriks iterasi

$$T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$$

Batas Kahan

$$\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$$

Faktor optimal (tridiagonal SPD)

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_j)^2}}$$

Algoritma: SOR

1. Masukkan A, b, tebakan awal $x^{(0)}$, faktor ω ($0 < \omega < 2$), toleransi ε, dan batas iterasi N.
2. Untuk $k = 1, \ldots, N$: simpan $x^{\text{lama}} \leftarrow x$.
3. Untuk $i = 1, \ldots, n$: hitung $\hat{x}_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j - \sum_{j>i} a_{ij}x_j\right)$ memakai nilai terbaru yang tersedia, lalu $x_i \leftarrow (1-\omega)x_i + \omega\hat{x}_i$.
4. Jika $\|x - x^{\text{lama}}\| < \varepsilon$, keluarkan x dan berhenti.
5. Jika N iterasi habis, laporkan kegagalan mencapai toleransi.

Contoh 1: Faktor optimal untuk matriks tridiagonal 5x5

Matriks A berukuran 5×5 dengan 2 pada diagonal dan -1 pada kedua diagonal sebelahnya. Hitung $\rho(T_j)$, ω_{opt}, dan $\rho(T_{\omega_{\text{opt}}})$, lalu bandingkan.

Penyelesaian.

Nilai eigen T_j adalah $\cos\frac{k\pi}{6}$ untuk $k = 1, \ldots, 5$, sehingga $\rho(T_j) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$. Maka $\rho(T_j)^2 = \frac{3}{4}$ dan

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$$

Jari-jari spektral hasil perhitungan numerik: Gauss-Seidel $\rho(T_g) = 0{,}7500 \approx \rho(T_j)^2 = 0{,}7500$, dan SOR optimal $\rho(T_{\omega_{\text{opt}}}) = 0{,}3333 = \omega_{\text{opt}} - 1$. Karena galat berkurang kira-kira dengan faktor ρ per iterasi, SOR optimal jauh lebih cepat daripada Gauss-Seidel. Untuk perbandingan, berikut $\rho(T_\omega)$ pada beberapa ω:

$\omega = 0{,}5000$: $\rho(T_\omega) = 0{,}9140$

$\omega = 1{,}0000$: $\rho(T_\omega) = 0{,}7500$

$\omega = 1{,}2000$: $\rho(T_\omega) = 0{,}6150$

$\omega = 1{,}3333$: $\rho(T_\omega) = 0{,}3333$

$\omega = 1{,}5000$: $\rho(T_\omega) = 0{,}5000$

$\omega = 1{,}8000$: $\rho(T_\omega) = 0{,}8000$

Nilai terkecil dicapai pada $\omega = \frac{4}{3}$, sesuai teori.

Contoh 2: Jumlah iterasi tiga metode

Untuk sistem $Ax = b$ pada contoh sebelumnya dengan $b = (0, 0, 0, 0, 6)^t$ (solusi $x = (1, 2, 3, 4, 5)^t$) dan $x^{(0)} = 0$, berapa iterasi yang diperlukan Jacobi, Gauss-Seidel, dan SOR optimal agar $\|x - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-5}$?

Penyelesaian.

Hasil dari program: Jacobi memerlukan 89 iterasi, Gauss-Seidel 46 iterasi, dan SOR dengan $\omega = \frac{4}{3}$ hanya 16 iterasi. Perbandingan ini konsisten dengan laju teoretis: $\rho(T_j)^k \approx 10^{-5}$ memberi $k \approx \frac{5}{-\log_{10} 0{,}866} \approx 80$; selisih dari angka sebenarnya wajar karena galat awal bernilai 5, bukan 1. Adapun SOR memperbaiki lajunya menjadi $\rho = 0{,}333$.

Contoh 3: Satu sapuan SOR secara manual

Selesaikan $4x_1 + x_2 = 5$, $x_1 + 4x_2 + x_3 = 6$, $x_2 + 4x_3 = 5$ (solusi $(1, 1, 1)^t$) dengan $\omega = 1{,}2$ dari $x^{(0)} = 0$. Hitung tiga iterasi pertama.

Penyelesaian.

Iterasi pertama: $x_1^{(1)} = 1{,}2 \cdot \frac{5}{4} = 1{,}5000$. Lalu $x_2^{(1)} = 1{,}2 \cdot \frac{6 - 1{,}5000}{4} = 1{,}3500$. Lalu $x_3^{(1)} = 1{,}2 \cdot \frac{5 - 1{,}3500}{4} = 1{,}0950$. Tiga iterasi pertama:

$k = 1$: $(1{,}50000;\ 1{,}35000;\ 1{,}09500)^t$

$k = 2$: $(0{,}79500;\ 0{,}96300;\ 0{,}99210)^t$

$k = 3$: $(1{,}05210;\ 0{,}99414;\ 1{,}00334)^t$

Iterasi mendekati $(1, 1, 1)^t$; matriks ini simetris positif definit dan tridiagonal sehingga teori Ostrowski-Reich menjamin konvergensi untuk setiap $0 < \omega < 2$.

Kesalahan umum

• Memilih $\omega \geq 2$ atau $\omega \leq 0$. Menurut teorema Kahan, SOR tidak dapat konvergen untuk semua tebakan awal di luar $0 < \omega < 2$.

• Mengira makin besar ω makin cepat. Kurva $\rho(T_\omega)$ memiliki minimum di ω_{opt} dan menanjak setelahnya; ω terlalu besar bisa lebih lambat daripada Gauss-Seidel.

• Memakai rumus ω_{opt} untuk matriks yang bukan tridiagonal simetris positif definit. Rumus itu hanya terjamin pada kelas tersebut (dan kelas yang berkaitan, seperti matriks terurut konsisten).

• Menyamakan SOR dengan "Gauss-Seidel dikalikan ω". Yang dikalikan adalah koreksi, sedangkan nilai lama tetap ikut dengan bobot $1 - \omega$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$ menjadi batas bawah yang tidak bergantung pada A? Apa yang dikatakannya tentang determinan T_ω?
2. Mengapa pada ω_{opt} kurva $\rho(T_\omega)$ turun dengan landai dari kiri tetapi naik tajam di kanan?
3. Bagaimana Anda dapat menaksir ω_{opt} ketika $\rho(T_j)$ tidak diketahui?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk A tridiagonal simetris positif definit dengan $\rho(T_j) = 0{,}6$, hitung ω_{opt} dan $\rho(T_{\omega_{\text{opt}}})$.

Kunci: $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0{,}36}} = \frac{2}{1 + 0{,}8} = 1{,}1111$ dan $\rho = \omega_{\text{opt}} - 1 = 0{,}1111$.

2. Tulis rumus satu langkah SOR untuk x_1 pada sistem $3x_1 - x_2 = 2$, $-x_1 + 3x_2 = 2$ dengan $\omega = 1{,}1$ dari $x^{(0)} = 0$.

Kunci: $x_1^{(1)} = 1{,}1 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}7333$, lalu $x_2^{(1)} = 1{,}1 \cdot \frac{2 + 0{,}7333}{3} = 1{,}0022$.

3. Mengapa $\omega = 2{,}5$ tidak dapat dipakai untuk SOR pada sembarang sistem?

Kunci: Teorema Kahan: $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1| = 1{,}5 > 1$, sehingga iterasi divergen untuk hampir semua tebakan awal. Pada contoh 5×5, perhitungan numerik memberi $\rho(T_{2,5}) = 1{,}5000$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

7.5 Error Bounds and Iterative Refinement

Rujukan buku: halaman 469

Setelah suatu sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ diselesaikan secara numerik, kita memperoleh hampiran $\tilde{\mathbf{x}}$ dan wajar bertanya: seberapa dekat hampiran itu dengan solusi sebenarnya? Satu-satunya besaran yang dapat dihitung langsung adalah vektor residu $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$. Godaan yang sering muncul adalah menyimpulkan bahwa residu kecil berarti galat kecil. Kesimpulan itu benar untuk banyak sistem, tetapi salah untuk sistem yang hampir singular. Contoh sederhana: dua garis yang hampir sejajar berpotongan di satu titik, tetapi titik yang jauh dari perpotongan masih dapat berada sangat dekat dengan kedua garis, sehingga residunya kecil padahal galatnya besar.

Hubungan yang tepat antara galat dan residu diberikan oleh identitas $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{r}$. Dari sini, untuk sembarang norma natural, diperoleh $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \le \|A^{-1}\|\,\|\mathbf{r}\|$. Karena $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ memberi $\|\mathbf{b}\| \le \|A\|\,\|\mathbf{x}\|$, galat relatif terbatas oleh $\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Faktor $K(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ disebut bilangan kondisi matriks. Selalu berlaku $K(A) \ge \|I\| = 1$. Matriks dengan $K(A)$ dekat 1 disebut berkondisi baik (well-conditioned), sedangkan matriks dengan $K(A)$ besar disebut berkondisi buruk (ill-conditioned). Perlu dicatat bahwa $K(A)$ bergantung pada norma yang dipilih, tetapi untuk semua norma yang dipakai nilainya berorde sama sehingga kesimpulan kualitatifnya tidak berubah; yang penting norma dipakai secara konsisten.

Menghitung A^{-1} hanya untuk menaksir $K(A)$ terlalu mahal dan sendirinya terkena galat pembulatan. Ada jalan pintas. Bila sistem diselesaikan dengan eliminasi Gauss pada aritmetika t digit dan residu dihitung dengan ketelitian ganda, maka $\|\mathbf{r}\| \approx 10^{-t}\|A\|\,\|\tilde{\mathbf{x}}\|$. Selesaikan lagi $A\mathbf{y} = \mathbf{r}$ dengan faktorisasi LU yang sudah tersedia (murah, hanya substitusi). Karena $\tilde{\mathbf{y}} \approx \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{r}$, diperoleh taksiran $K(A) \approx \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}10^{t}$.

Vektor $\tilde{\mathbf{y}}$ tadi sekaligus memberi koreksi. Hampiran baru $\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}}$ umumnya lebih baik daripada $\tilde{\mathbf{x}}$. Mengulang proses ini, yaitu menghitung residu, menyelesaikan sistem koreksi, lalu menambahkan koreksi, dinamakan perbaikan iteratif (iterative refinement). Bila aritmetika memakai t digit dan $K_\infty(A) \approx 10^{q}$, maka setelah k iterasi banyaknya digit benar kira-kira $\min\{t,\ k(t-q)\}$. Jadi sistem yang berkondisi baik cukup memerlukan satu atau dua iterasi, sedangkan jika $K_\infty(A) > 10^{t}$ perbaikan tidak lagi berhasil dan ketelitian aritmetika harus dinaikkan. Kunci keberhasilannya ialah residu dihitung dengan presisi lebih tinggi; tanpa itu pengurangan $\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$ kehilangan hampir semua angka signifikan akibat pembatalan.

Pertanyaan terakhir menyangkut data yang tidak tepat. Dalam praktik A dan $\mathbf{b}$ sendiri mengandung galat, sehingga yang diselesaikan adalah $(A + \delta A)\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$. Bila A nonsingular dan $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, galat relatif solusi dibatasi oleh $\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \frac{K(A)}{1 - K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$. Jadi $K(A)$ bekerja sebagai faktor penguat bagi galat data masukan, terlepas dari metode numerik yang dipakai. Analisis galat mundur (backward error analysis) Wilkinson menambahkan bahwa eliminasi Gauss dengan pivoting menghasilkan solusi yang tepat untuk sistem terganggu $(A + \delta A)\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ dengan δA kecil. Dengan demikian galat akhir praktis ditentukan oleh perkalian antara kecilnya gangguan itu dan $K(A)$.

Seksi ini menghubungkan norma matriks (Seksi 7.1) dengan eliminasi Gauss berpivot dan faktorisasi LU (Bab 6), dan memberi alasan mengapa pivoting serta ketelitian ganda penting. Ia juga memberi peringatan bagi metode iteratif di Seksi 7.3-7.6: kecepatan konvergensinya pun dipengaruhi oleh kondisi matriks.

Konsep kunci

Vektor residu — Untuk hampiran $\tilde{\mathbf{x}}$, residunya $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$. Residu dapat dihitung tanpa mengetahui solusi sebenarnya, tetapi besarnya tidak selalu mencerminkan besarnya galat.

Galat dan residu — Berlaku $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{r}$, sehingga $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \le \|A^{-1}\|\,\|\mathbf{r}\|$. Matriks invers yang bernorma besar membuat residu kecil tidak menjamin galat kecil.

Bilangan kondisi — $K(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \ge 1$. Bilangan ini menjadi faktor penguat antara residu relatif dan galat relatif, serta antara gangguan data dan perubahan solusi.

Berkondisi baik dan buruk — $K(A)$ dekat 1 berarti berkondisi baik; $K(A)$ besar berarti berkondisi buruk, yaitu hampir singular dalam arti numerik. Ukuran kondisi bergantung pada A, bukan pada algoritmanya.

Taksiran $K(A)$ murah — Dengan eliminasi Gauss t digit dan residu berpresisi ganda, $K(A) \approx \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} 10^{t}$ dengan $A\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{r}$, tanpa menghitung A^{-1}.

Perbaikan iteratif — Ulangi: hitung $\mathbf{r}$ berpresisi tinggi, selesaikan $A\mathbf{y} = \mathbf{r}$ dengan LU yang sama, lalu perbarui $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Berhasil bila $K_{\infty}(A) < 10^{t}$.

Gangguan data — Jika A dan $\mathbf{b}$ terganggu oleh δA dan $\delta\mathbf{b}$, galat relatif solusi dibatasi oleh $K(A)$ dikali galat relatif data (dengan syarat $\|\delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$).

Hubungan galat dan residu

$$\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$$

Batas galat berdasarkan residu

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \le K(A)\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le K(A)\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Bilangan kondisi

$$K(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\| \ge \|I\| = 1$$

Taksiran bilangan kondisi (t digit)

$$K(A) \approx \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}\,10^{t}, \qquad A\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{r}$$

Perbaikan iteratif

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}, \quad A\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}, \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}^{(k)}$$

Pengaruh gangguan data

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \frac{K(A)}{1 - K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

Algoritma: Perbaikan iteratif

1. Selesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan eliminasi Gauss berpivot dan simpan faktor LU (beserta pertukaran baris) untuk dipakai ulang. Masukkan juga batas iterasi N, toleransi, dan jumlah digit t.
2. Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$: hitung residu $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ dengan presisi ganda.
3. Selesaikan $A\mathbf{y} = \mathbf{r}$ dengan faktor LU yang tersimpan (hanya substitusi maju dan mundur).
4. Perbarui $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Pada iterasi pertama, simpan taksiran kondisi $\mathrm{COND} = \frac{\|\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} 10^t$.
5. Berhenti bila koreksi cukup kecil (misalnya $|y_i| \le 10^{-t}$ untuk semua i) dan keluarkan $\mathbf{x}$ serta COND; bila N iterasi habis, laporkan kegagalan bersama COND.

Contoh 1: Residu kecil, galat besar

Sistem $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 + 1{,}01x_2 = 2{,}01$ bersolusi $\mathbf{x} = (1, 1)^t$. Hitung residu untuk hampiran $\tilde{\mathbf{x}} = (2, 0)^t$, galatnya, $K_\infty(A)$, dan batas galat relatif.

Penyelesaian.

Residu: $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}} = (2,\ 2{,}01)^t - (2,\ 2)^t = (0,\ 0{,}01)^t$, sehingga $\|\mathbf{r}\|_\infty = 0{,}01$. Padahal $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = (-1, 1)^t$ dan galat $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 1$, yaitu seratus kali lebih besar dari residunya.

Invers: A^{-1} memiliki elemen $(A^{-1})_{11} = 101$, $(A^{-1})_{12} = -100$, $(A^{-1})_{21} = -100$, $(A^{-1})_{22} = 100$. Maka $\|A^{-1}\|_\infty = 201$ dan $\|A\|_\infty = 2{,}01$, sehingga $K_\infty(A) = 2{,}01 \times 201 = 404{,}01$.

Batas galat relatif: $K_\infty(A)\frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = 404{,}01 \times \frac{0{,}01}{2{,}01} = 2{,}01$. Galat relatif sebenarnya adalah $\frac{1}{1} = 1 \le 2{,}01$, jadi batas terpenuhi. Nilai $K \approx 404$ menjelaskan mengapa residu kecil menyesatkan.

Contoh 2: Perbaikan iteratif pada matriks Hilbert 4x4

Matriks Hilbert H dengan $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, memiliki $K_\infty(H) \approx 28375$. Ambil $\mathbf{b} = H\mathbf{x}$ dengan $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)^t$ dan selesaikan dengan faktorisasi berpresisi tunggal (float32, sekitar 7 digit), tetapi hitung residu dalam presisi ganda. Bagaimana galat berkembang?

Penyelesaian.

Hampiran awal (presisi tunggal): $\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} \approx (0{,}999999;\ 1{,}000013;\ 0{,}999969;\ 1{,}000021)^t$ dengan galat $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}\|_\infty \approx 3{,}1 \times 10^{-5}$. Ini masuk akal: galat relatif sekitar $K \cdot \epsilon_{\text{mesin}} \approx 28375 \times 6 \times 10^{-8} \approx 2 \times 10^{-3}$ sebagai batas kasar, dan galat nyata jauh di bawahnya.

Satu perbaikan: hitung $\mathbf{r} = \mathbf{b} - H\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}$ (presisi ganda), selesaikan $H\mathbf{y} = \mathbf{r}$ dengan faktor presisi tunggal. Hasilnya $\|\mathbf{y}\|_\infty \approx 3{,}1 \times 10^{-5}$, sehingga galat setelah iterasi pertama turun menjadi $\approx 6{,}5 \times 10^{-10}$. Iterasi kedua menurunkannya ke $\approx 5{,}9 \times 10^{-13}$.

Setiap iterasi mengurangi galat sekitar faktor 10^4 sampai 10^5. Ini lebih baik daripada ramalan konservatif $k(t - q)$ dengan $t \approx 7$ dan $q = \log_{10} K \approx 4{,}5$ (sekitar 2,5 digit per iterasi); ramalan itu adalah perkiraan kasar, bukan nilai pasti. Perhatikan pula bahwa ukuran koreksi $\|\mathbf{y}\|_\infty$ hampir sama dengan galat sebelumnya, sehingga $\|\mathbf{y}\|$ dapat dipakai sebagai penaksir galat tanpa mengetahui solusi sebenarnya.

Contoh 3: Pengaruh gangguan pada ruas kanan

Untuk sistem pada Contoh 1, ruas kanan diganggu menjadi $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ dengan $\delta\mathbf{b} = (0,\ 0{,}001)^t$ (matriks A tetap). Hitung solusi baru, galat relatifnya, dan bandingkan dengan batas dari $K(A)$.

Penyelesaian.

Sistem terganggu: $x_1 + x_2 = 2$ dan $x_1 + 1{,}01x_2 = 2{,}011$. Kurangkan persamaan pertama dari kedua: $0{,}01x_2 = 0{,}011$, jadi $x_2 = 1{,}1$ dan $x_1 = 0{,}9$. Solusi baru $(0{,}9;\ 1{,}1)^t$.

Galat relatif: $\frac{\|(0{,}1;\ -0{,}1)\|_\infty}{\|(1,1)\|_\infty} = 0{,}1$. Gangguan relatif pada data hanya $\frac{\|\delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = \frac{0{,}001}{2{,}01} \approx 4{,}98 \times 10^{-4}$, tetapi galat solusinya $0{,}1$, yaitu sekitar 200 kali lebih besar.

Batas: $K_\infty(A)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 404{,}01 \times 4{,}98 \times 10^{-4} \approx 0{,}201$. Karena $0{,}1 \leq 0{,}201$, batas terpenuhi, dan penguatan nyata (200) berada di bawah penguatan maksimum $K = 404$.

Kesalahan umum

• Menyimpulkan bahwa residu kecil pasti berarti hampiran akurat. Hubungan galat-residu melibatkan $\|A^{-1}\|$; pada matriks berkondisi buruk, galat dapat ratusan atau ribuan kali lebih besar daripada residu.

• Menilai kondisi suatu matriks dari determinannya. Determinan kecil tidak berarti berkondisi buruk (misalnya ϵI berkondisi sempurna, $K = 1$), dan determinan besar tidak menjamin kondisi baik. Ukuran yang benar adalah $K(A)$.

• Menghitung residu dengan presisi yang sama dengan penyelesaian sistem. Pengurangan dua bilangan hampir sama menghapus angka signifikan, sehingga perbaikan iteratif gagal; residu harus dihitung dengan presisi lebih tinggi.

• Menganggap perbaikan iteratif dapat menyembuhkan matriks berkondisi sangat buruk. Jika $K_\infty(A) > 10^t$, koreksi tidak lagi konvergen; yang diperlukan adalah presisi aritmetika yang lebih tinggi.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $K(A) \geq 1$ untuk setiap norma natural? Matriks apa saja yang mencapai $K_2(A) = 1$?
2. Interpretasikan secara geometri mengapa dua garis yang hampir sejajar menghasilkan matriks berkondisi buruk dan titik jauh dengan residu kecil.
3. Perbaikan iteratif memakai faktor LU yang sama berulang kali. Mengapa ini murah, dan bagian mana yang tetap mahal atau perlu presisi lebih tinggi?
4. Batas galat memakai $K(A)$, yang berasal dari analisis terburuk. Kapan galat sebenarnya jauh lebih kecil dari batas, dan apakah itu mengurangi arti pentingnya $K(A)$?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung $K_\infty(A)$ untuk matriks dengan elemen $a_{11}=1$, $a_{12}=3$, $a_{21}=2$, $a_{22}=6{,}01$.

Kunci: $\|A\|_\infty = \max\{4;\ 8{,}01\} = 8{,}01$. Determinan $=0{,}01$ dan A^{-1} memiliki elemen $(601,\ -300;\ -200,\ 100)$, jadi $\|A^{-1}\|_\infty = 901$. Maka $K_\infty(A) = 8{,}01 \times 901 = 7217{,}01$.

2. Untuk A pada soal 1 dan $\mathbf{b} = (4;\ 8{,}01)^t$ (solusi $(1,1)^t$), hitung residu hampiran $\tilde{\mathbf{x}} = (4,0)^t$, galat $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, dan batas galat relatif dari $K_\infty(A)$.

Kunci: $\mathbf{r} = (4;\ 8{,}01)^t - (4;\ 8)^t = (0;\ 0{,}01)^t$, $\|\mathbf{r}\|_\infty = 0{,}01$. Galat $= \|(-3;\ 1)\|_\infty = 3$, galat relatif 3. Batas: $7217{,}01 \times \frac{0{,}01}{8{,}01} \approx 9{,}01 \geq 3$.

3. Berapa digit benar yang diharapkan setelah satu, dua, dan tiga iterasi perbaikan jika $t=8$ dan $K_\infty(A) \approx 10^4$?

Kunci: $\min\{t, k(t-q)\}$ dengan $t-q=4$: satu iterasi sekitar 4 digit, dua iterasi sekitar 8 digit (sudah mencapai t), tiga iterasi tetap 8 digit karena dibatasi t.

Web by: Steven Paulus Siahaan

7.6 The Conjugate Gradient Method

Rujukan buku: halaman 479

Metode gradien konjugat (conjugate gradient, CG) dari Hestenes dan Stiefel dirancang untuk sistem $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ dengan A simetrik dan definit positif. Secara teori ia metode langsung: dalam aritmetika eksak solusi diperoleh paling lambat setelah n langkah. Sebagai metode langsung ia tidak mengalahkan eliminasi Gauss berpivot, karena tiap langkahnya lebih mahal. Keunggulannya muncul ketika ia dipakai sebagai metode iteratif untuk sistem besar dan jarang (sparse), misalnya hasil diskretisasi masalah nilai batas. Di situ hanya perkalian matriks-vektor yang dibutuhkan, dan galat sering sudah cukup kecil jauh sebelum langkah ke-n, terutama bila matriks diprakondisi.

Titik awalnya adalah mengubah persoalan aljabar menjadi persoalan minimisasi. Dengan notasi hasil kali dalam $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{x}^t\mathbf{y}$, definisikan $g(\mathbf{x})=\langle \mathbf{x},A\mathbf{x}\rangle-2\langle \mathbf{x},\mathbf{b}\rangle$. Bila A definit positif, vektor $\mathbf{x}^*$ memenuhi $A\mathbf{x}^*=\mathbf{b}$ jika dan hanya jika $\mathbf{x}^*$ meminimumkan g. Buktinya memakai fungsi kuadrat satu variabel: untuk $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, $g(\mathbf{x}+t\mathbf{v})=g(\mathbf{x})-2t\langle \mathbf{v},\mathbf{b}-A\mathbf{x}\rangle+t^2\langle \mathbf{v},A\mathbf{v}\rangle$. Minimum dalam t dicapai pada $t=\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{b}-A\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{v},A\mathbf{v}\rangle}$, dan nilai g turun kecuali bila $\langle \mathbf{v},\mathbf{b}-A\mathbf{x}\rangle=0$. Jadi g tidak dapat diperkecil lagi oleh arah mana pun tepat ketika residu $\mathbf{r}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}$ nol.

Ini menyarankan skema: dari $\mathbf{x}^{(k-1)}$ bergerak sepanjang arah pencarian $\mathbf{v}^{(k)}$ sejauh t_k yang meminimumkan g pada garis itu, yaitu $\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{x}^{(k-1)}+t_k\mathbf{v}^{(k)}$ dengan $t_k=\frac{\langle \mathbf{v}^{(k)},\mathbf{r}^{(k-1)}\rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)},A\mathbf{v}^{(k)}\rangle}$. Persoalannya tinggal memilih arah. Gradien g adalah $\nabla g(\mathbf{x})=-2\mathbf{r}$, sehingga arah penurunan tercuram adalah arah residu. Memilih $\mathbf{v}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}$ menghasilkan metode steepest descent, yang lambat karena arah-arah berurutan saling merusak kemajuan satu sama lain (berzigzag), terutama pada lembah yang memanjang.

Gagasan CG adalah memilih arah yang A-ortogonal (konjugat), yaitu $\langle \mathbf{v}^{(i)},A\mathbf{v}^{(j)}\rangle=0$ untuk $i\neq j$. Himpunan arah A-ortogonal yang tak nol bebas linear, dan bila dipakai, setelah n langkah berlaku $A\mathbf{x}^{(n)}=\mathbf{b}$ (dalam aritmetika eksak). Intuisinya: tiap langkah meminimumkan g sepanjang satu arah dan, karena arah-arah itu konjugat, langkah berikutnya tidak membatalkan hasil langkah sebelumnya; setelah k langkah g minimum pada seluruh ruang bagian yang direntang arah-arah tadi. Dalam praktik arah tidak ditentukan di awal, melainkan dibangun sambil jalan dari residu. Dengan $\mathbf{v}^{(1)}=\mathbf{r}^{(0)}$ dan rekurensi $t_k=\frac{\langle \mathbf{r}^{(k-1)},\mathbf{r}^{(k-1)}\rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)},A\mathbf{v}^{(k)}\rangle}$, $\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{x}^{(k-1)}+t_k\mathbf{v}^{(k)}$, $\mathbf{r}^{(k)}=\mathbf{r}^{(k-1)}-t_kA\mathbf{v}^{(k)}$, $s_k=\frac{\langle \mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)}\rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)},\mathbf{r}^{(k-1)}\rangle}$, $\mathbf{v}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}+s_k\mathbf{v}^{(k)}$, dapat ditunjukkan bahwa residu-residu saling ortogonal dan arah-arahnya A-ortogonal. Setiap iterasi hanya memerlukan satu perkalian $A\mathbf{v}^{(k)}$ dan beberapa hasil kali dalam, sehingga memori dan kerjanya kecil untuk matriks jarang.

Pada aritmetika berhingga, ortogonalitas hilang perlahan akibat galat pembulatan, jadi CG sebaiknya dipandang sebagai metode iteratif dengan kriteria berhenti $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ kecil, bukan metode langsung berhingga. Laju konvergensinya bergantung pada bilangan kondisi $\kappa=K_2(A)$: galat dalam norma energi $\|\mathbf{e}\|_A=\sqrt{\mathbf{e}^tA\mathbf{e}}$ memenuhi $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\|_A\le 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\|_A$. Akar kuadrat dari κ inilah yang membuat CG jauh lebih cepat daripada steepest descent, yang faktornya $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$. CG juga selesai lebih awal bila A hanya memiliki sedikit nilai eigen berbeda.

Prakondisi (preconditioning) bertujuan menurunkan κ. Dipilih matriks definit positif M yang mendekati A tetapi mudah dibalik, lalu CG diterapkan pada sistem yang setara sehingga yang menentukan laju adalah kondisi $M^{-1}A$. Pada versi yang dikenal, setiap iterasi menambah satu penyelesaian $M\mathbf{z}^{(k)}=\mathbf{r}^{(k)}$; hasil kali dalam residu diganti $\langle \mathbf{z},\mathbf{r}\rangle$ dan arah dibangun dari $\mathbf{z}$. Contoh pilihan M adalah diagonal A (Jacobi), bagian dari Gauss-Seidel

Web by: Steven Paulus Siahaan

simetrik, atau faktorisasi Cholesky tak lengkap. Dengan prakondisi yang baik, jumlah iterasi sering hanya sekitar $\sqrt{n}$ untuk masalah batas yang khas. Metode ini berhubungan dengan Seksi 7.3-7.4 (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR) sebagai pesaing iteratif, dengan Seksi 7.5 melalui peran bilangan kondisi, dan dengan Seksi 10.4 melalui metode steepest descent untuk sistem nonlinear.

Konsep kunci

Matriks simetrik definit positif — $A = A^t$ dan $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ untuk $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Syarat ini wajib bagi CG; ia membuat $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ menjadi hasil kali dalam dan g memiliki minimum tunggal.

Fungsional kuadrat — $g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle$ diminimumkan tepat oleh solusi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dengan demikian menyelesaikan sistem sama dengan meminimumkan g.

Residu dan gradien — $\nabla g(\mathbf{x}) = -2\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$. Arah residu adalah arah penurunan tercuram, tetapi memakainya terus-menerus (steepest descent) berkonvergensi lambat.

A-ortogonal (konjugat) — Vektor $\mathbf{v}^{(i)}$ dan $\mathbf{v}^{(j)}$ A-ortogonal jika $\langle \mathbf{v}^{(i)}, A\mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$. Himpunan tak nol yang A-ortogonal bebas linear.

Terminasi di n langkah — Dengan n arah A-ortogonal dan aritmetika eksak, $A\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$. Dalam praktik galat pembulatan merusak sifat ini, sehingga kriteria berhenti pada residu tetap dipakai.

Laju konvergensi — Galat norma-A turun dengan faktor kira-kira $\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}$ per iterasi, bergantung pada $\kappa = K_2(A)$. Matriks dengan κ kecil atau sedikit nilai eigen berbeda cepat selesai.

Prakondisi — Memakai $M \approx A$ yang mudah dibalik agar $M^{-1}A$ berkondisi lebih baik. Tiap iterasi menambah satu penyelesaian $M\mathbf{z} = \mathbf{r}$; pilihan M menentukan seluruh efisiensi.

Fungsional yang diminimumkan

$$g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle, \qquad \nabla g(\mathbf{x}) = -2(\mathbf{b} - A\mathbf{x})$$

Langkah optimal sepanjang arah $\mathbf{v}$

$$\hat{t} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} - A\mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle}, \qquad g(\mathbf{x} + \hat{t}\mathbf{v}) = g(\mathbf{x}) - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{b} - A\mathbf{x} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle}$$

Syarat A-ortogonal

$$\langle \mathbf{v}^{(i)}, A\mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

Pembaruan solusi dan residu

$$t_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k)} \rangle}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - t_k A\mathbf{v}^{(k)}$$

Arah pencarian baru

$$s_k = \frac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}, \qquad \mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + s_k \mathbf{v}^{(k)}$$

Batas galat norma energi

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_A \le 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A$$

Algoritma: Gradien konjugat

1. Masukkan A (simetrik definit positif), $\mathbf{b}$, tebakan awal $\mathbf{x}^{(0)}$, toleransi, dan batas iterasi. Hitung $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ dan set $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)}$.
2. Untuk $k = 1, 2, \ldots$: hitung $\mathbf{w} = A\mathbf{v}^{(k)}$ dan $t_k = \dfrac{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w} \rangle}$.
3. Perbarui $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + t_k \mathbf{v}^{(k)}$ dan $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k-1)} - t_k \mathbf{w}$.
4. Bila $\|\mathbf{r}^{(k)}\|$ kurang dari toleransi, keluarkan $\mathbf{x}^{(k)}$ dan berhenti.
5. Hitung $s_k = \dfrac{\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{r}^{(k-1)}, \mathbf{r}^{(k-1)} \rangle}$ dan arah baru $\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + s_k \mathbf{v}^{(k)}$, lalu ulangi.
6. Versi berprakondisi: tambahkan penyelesaian $M\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ pada tiap iterasi dan ganti $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ dengan $\langle \mathbf{z}, \mathbf{r} \rangle$, serta $\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + s_k \mathbf{v}^{(k)}$ (dengan $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{z}^{(0)}$).

Contoh 1: CG pada sistem 2x2

Selesaikan $4x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + 3x_2 = 2$ dengan CG mulai dari $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ dan tunjukkan nilai g pada tiap langkah.

Penyelesaian.

Matriks A simetrik dengan minor utama $4 > 0$ dan $\det A = 11 > 0$, jadi definit positif. $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} = (1, 2)^t$ dan $\mathbf{v}^{(1)} = (1, 2)^t$.

Langkah 1: $A\mathbf{v}^{(1)} = (6, 7)^t$, $\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(1)} \rangle = 6 + 14 = 20$, $\langle \mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)} \rangle = 5$, jadi $t_1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Maka $\mathbf{x}^{(1)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})^t$ dan $\mathbf{r}^{(1)} = (1, 2)^t - \frac{1}{4}(6, 7)^t = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^t$. Nilai g turun dari 0 ke $-\frac{5}{4}$.

Arah baru: $\langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)} \rangle = \frac{5}{16}$, $s_1 = \frac{5/16}{5} = \frac{1}{16}$, $\mathbf{v}^{(2)} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^t + \frac{1}{16}(1, 2)^t = (-\frac{7}{16}, \frac{3}{8})^t$. Periksa A-ortogonal: $A\mathbf{v}^{(1)} = (6, 7)^t$ dan $\langle \mathbf{v}^{(2)}, A\mathbf{v}^{(1)} \rangle = -\frac{42}{16} + \frac{42}{16} = 0$.

Langkah 2: $A\mathbf{v}^{(2)} = (-\frac{11}{8}, \frac{11}{16})^t$, $\langle \mathbf{v}^{(2)}, A\mathbf{v}^{(2)} \rangle = \frac{55}{64}$, $t_2 = \frac{5/16}{55/64} = \frac{4}{11}$. Maka $\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{1}{11}, \frac{7}{11})^t$ dan $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{0}$; g turun ke $-\frac{15}{11}$, yaitu nilai minimum. Pemeriksaan: $4 \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{11} = 1$ dan $\frac{1}{11} + \frac{21}{11} = 2$. Selesai dalam $n = 2$ langkah.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Contoh 2: Sistem tridiagonal 3x3 selesai lebih cepat

Terapkan CG dari $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ pada sistem dengan A tridiagonal (diagonal 2, diagonal samping -1) dan $\mathbf{b} = (1, 0, 1)^t$. Solusi sebenarnya $(1, 1, 1)^t$.

Penyelesaian.

$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{v}^{(1)} = (1, 0, 1)^t$. $A\mathbf{v}^{(1)} = (2, -2, 2)^t$, $\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(1)} \rangle = 4$, $\langle \mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)} \rangle = 2$, jadi $t_1 = \frac{1}{2}$ dan $\mathbf{x}^{(1)} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^t$. Residu: $\mathbf{r}^{(1)} = (1, 0, 1)^t - \frac{1}{2}(2, -2, 2)^t = (0, 1, 0)^t$.

$s_1 = \frac{1}{2}$, sehingga $\mathbf{v}^{(2)} = (0, 1, 0)^t + \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})^t$. $A\mathbf{v}^{(2)} = (0, 1, 0)^t$, $\langle \mathbf{v}^{(2)}, A\mathbf{v}^{(2)} \rangle = 1$, $t_2 = \frac{1}{1} = 1$. Maka $\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^t + (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})^t = (1, 1, 1)^t$ dan $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{0}$.

Solusi eksak diperoleh dalam 2 langkah, bukan $n = 3$. Sebabnya: $\mathbf{b}$ ortogonal terhadap vektor eigen $(1, 0, -1)^t$, sehingga ruang Krylov yang terlibat berdimensi 2. Ini contoh bahwa jumlah langkah CG ditentukan oleh struktur spektrum dan $\mathbf{b}$, bukan hanya oleh n.

Contoh 3: Perbandingan laju CG dan steepest descent

Misalkan $\kappa = K_2(A) = 100$. Berapa iterasi diperlukan agar batas galat norma-A turun hingga 10^{-6} kali galat awal, untuk CG dan untuk steepest descent?

Penyelesaian.

Untuk CG, faktor per iterasi $\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1} = \frac{9}{11} \approx 0{,}8182$ dan batasnya $2\left(\frac{9}{11}\right)^k$. Syarat $2\left(\frac{9}{11}\right)^k \le 10^{-6}$ memberi $k \ge \frac{\ln(2 \times 10^6)}{-\ln(9/11)} \approx 72{,}3$, jadi $k = 73$.

Untuk steepest descent, faktor galat norma-A adalah $\frac{\kappa-1}{\kappa+1} = \frac{99}{101} \approx 0{,}9802$. Syarat $\left(\frac{99}{101}\right)^k \le 10^{-6}$ memberi $k \ge \frac{\ln 10^6}{-\ln(99/101)} \approx 690{,}8$, jadi $k = 691$.

Perbandingannya sekitar 9,5 kali lebih sedikit iterasi untuk CG (menurut batas teoretis), dan selisih ini melebar seiring κ membesar karena perbandingannya berskala $\sqrt{\kappa}$. Keduanya hanyalah batas atas, jadi jumlah iterasi sebenarnya bisa lebih kecil.

Kesalahan umum

• Memakai CG untuk matriks yang tidak simetrik atau tidak definit positif. Seluruh turunan (hasil kali dalam $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$, minimisasi g) bergantung pada syarat itu; tanpa syarat ini metode dapat gagal.

• Menyamakan CG dengan steepest descent. Steepest descent selalu memakai arah residu, sedangkan CG memakai arah yang dikoreksi dengan $s_k \mathbf{v}^{(k)}$ agar A-ortogonal; perbedaan ini menentukan kecepatan konvergensinya.

• Menganggap CG pasti berhenti tepat di n langkah pada komputer. Itu hanya berlaku dalam aritmetika eksak; dengan galat pembulatan, arah kehilangan A-ortogonalitas sehingga iterasi tambahan atau kriteria residu diperlukan.

• Mengira residu yang mengecil berarti galat mengecil sebanding. Seperti pada Seksi 7.5, hubungannya melewati $K(A)$; selain itu pada CG norma residu dapat naik-turun walau norma-A galat selalu turun.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa meminimumkan g ekuivalen dengan menyelesaikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hanya bila A definit positif? Apa yang terjadi bila A simetrik tetapi tak tentu?
2. Secara geometri, mengapa steepest descent berzigzag pada lembah sempit, dan bagaimana A-ortogonalitas mencegahnya?
3. CG hanya memerlukan perkalian $A\mathbf{v}$. Mengapa ini sangat menguntungkan untuk matriks jarang berukuran jutaan dibandingkan eliminasi Gauss?
4. Apa sifat yang diinginkan dari prakondisi M, dan mengapa dua tuntutan (mendekati A dan mudah dibalik) saling bertentangan?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tunjukkan bahwa A dengan elemen $a_{11} = 2$, $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$ definit positif, lalu hitung t_1 dan $\mathbf{x}^{(1)}$ CG untuk $\mathbf{b} = (3, 3)^t$ dari $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Kunci: Simetrik, $2 > 0$ dan $\det A = 3 > 0$ sehingga definit positif. $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{v}^{(1)} = (3, 3)^t$, $A\mathbf{v}^{(1)} = (9, 9)^t$, $\langle \mathbf{v}^{(1)}, A\mathbf{v}^{(1)} \rangle = 54$, $\langle \mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)} \rangle = 18$, jadi $t_1 = \frac{1}{3}$ dan $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1)^t$, yang sudah solusi eksak (karena $\mathbf{b}$ vektor eigen A).

2. Untuk A diagonal dengan diagonal $(1, 4)$, $\mathbf{b} = (1, 1)^t$, hitung $g(\mathbf{x}^*)$ pada solusi $\mathbf{x}^*$.

Kunci: $\mathbf{x}^* = (1, \frac{1}{4})^t$. $g(\mathbf{x}^*) = \langle \mathbf{x}^*, A\mathbf{x}^* \rangle - 2\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{b} \rangle = (1 + \frac{1}{4}) - 2(1 + \frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}$ (secara umum $g(\mathbf{x}^*) = -\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{b} \rangle$).

3. Jika $\kappa = 9$, berapa faktor reduksi galat norma-A per iterasi untuk CG dan steepest descent?

Kunci: CG: $\frac{\sqrt{9} - 1}{\sqrt{9} + 1} = \frac{2}{4} = 0{,}5$. Steepest descent: $\frac{9 - 1}{9 + 1} = 0{,}8$.

4. Untuk $A = \mathrm{diag}(1, 4)$ dan $\mathbf{b} = (1, 1)^t$ dari $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, apakah CG selesai pada langkah 1 atau 2? Jelaskan.

Kunci: Langkah 2. $\mathbf{v}^{(1)} = (1, 1)^t$ bukan vektor eigen karena eigenvektor A adalah $(1, 0)$ dan $(0, 1)$, dan $\mathbf{b}$ memuat keduanya; nilai eigen berbeda ada dua sehingga CG memerlukan dua langkah.

Pesan Utama

Ingat

Sistem dengan $K(A)$ besar peka terhadap galat sekecil apa pun; residu kecil belum menjamin solusi akurat.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.