MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 8

Teori Aproksimasi

Approximation Theory

Halaman buku 497 – 558 • 7 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Ringkasan Bab

Berbeda dengan interpolasi, pendekatan fungsi tidak mewajibkan kurva melewati data, melainkan meminimalkan ukuran galat. Kuadrat terkecil diskret menghasilkan persamaan normal; versi kontinu memakai polinom ortogonal terhadap fungsi bobot, sehingga sistem normal menjadi diagonal.

Polinom Chebyshev meminimalkan galat maksimum interpolasi dan dipakai untuk 'ekonomisasi' deret pangkat. Pendekatan rasional (Padé) sering lebih baik daripada polinom, sedangkan polinom trigonometri dan transformasi Fourier cepat (FFT) cocok untuk data periodik dan menurunkan biaya dari $O(N^2)$ menjadi $O(N \log N)$.

Tujuan Pembelajaran

1. Menyusun dan menyelesaikan persamaan normal kuadrat terkecil (linear, polinomial, eksponensial).
2. Menggunakan polinom ortogonal (Legendre, Chebyshev) untuk pendekatan fungsi.
3. Membentuk aproksimasi Padé sederhana.
4. Menjelaskan prinsip FFT dan keuntungannya.

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
8.1	Discrete Least Squares Approximation	498	3 contoh
8.2	Orthogonal Polynomials and Least Squares Approximation	510	Def. 8.1; Teo. 8.2; Teo. 8.3; Def. 8.4; Def. 8.5; Teo. 8.6; Teo. 8.7; Kor. 8.8; 3 contoh
8.3	Chebyshev Polynomials and Economization of Power Series	518	Teo. 8.9; Teo. 8.10; Kor. 8.11; 1 contoh
8.4	Rational Function Approximation	528	2 contoh
8.5	Trigonometric Polynomial Approximation	538	Lema 8.12; Teo. 8.13; 3 contoh
8.6	Fast Fourier Transforms	547	2 contoh
8.7	Survey of Methods and Software	558	–

Rumus dan Metode Kunci

Persamaan normal polinomial

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i \, x_i^{j}, \quad j = 0, \ldots, n$$

Pendekatan kontinu dengan basis ortogonal

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \phi_k(x) \, dx}{\int_a^b w(x) \phi_k(x)^2 \, dx}$$

Polinom Chebyshev

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Aproksimasi rasional

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n}{1 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}$$

Polinom trigonometri

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

8.1 Discrete Least Squares Approximation

Rujukan buku: halaman 498

Data hasil pengukuran hampir selalu mengandung galat. Jika kita memaksa sebuah fungsi melalui semua titik data, misalnya dengan polinom interpolasi berderajat tinggi, fungsi itu ikut meniru galat tersebut dan sering berosilasi liar di antara titik-titik. Pendekatan yang lebih masuk akal adalah mencari fungsi sederhana, misalnya garis lurus atau parabola, yang "paling dekat" ke seluruh data tanpa harus melewati satu pun titiknya. Pertanyaannya adalah bagaimana mengukur kedekatan itu. Dalam seluruh seksi ini kita menganggap nilai x_i eksakta dan hanya y_i yang mengandung galat.

Tiga ukuran galat yang wajar untuk titik data (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, dan model P adalah galat maksimum $\max_i |y_i - P(x_i)|$ (masalah minimaks), jumlah simpangan mutlak $\sum_i |y_i - P(x_i)|$, serta jumlah kuadrat simpangan. Ukuran pertama terlalu dipengaruhi oleh satu titik yang meleset jauh, sedangkan ukuran kedua tidak cukup menghukum titik yang menyimpang jauh; keduanya juga sulit diselesaikan secara aljabar karena fungsi nilai mutlak tidak mulus di nol. Jumlah kuadrat memberi bobot besar pada titik yang janggal tanpa membiarkannya mendominasi, dan yang terpenting, meminimumkannya cukup dengan menyamakan turunan parsial dengan nol sehingga diperoleh sistem persamaan linear.

Untuk model garis $P(x) = a_1 x + a_0$, kita meminimumkan $E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)^2$. Syarat perlu $\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0$ dan $\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$ menghasilkan persamaan normal

$$a_0\, m + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$
$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

yang penyelesaiannya diberikan oleh rumus kofaktor pada bagian rumus. Istilah "normal" berarti tegak lurus: vektor residu tegak lurus terhadap ruang yang direntang oleh kolom-kolom model.

Gagasan yang sama berlaku untuk polinom $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $n \le m - 1$. Menurunkan E terhadap setiap a_j memberi $n + 1$ persamaan normal $\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_i x_i^{j+k} = \sum_i y_i x_i^j$, $j = 0, \ldots, n$. Matriks sistemnya simetris dan positif definit bila x_i yang berbeda paling sedikit $n + 1$ buah, sehingga solusi tunggal ada. Dalam bahasa matriks, bila A adalah matriks Vandermonde $m \times (n+1)$ dengan entri x_i^k, persamaan normal berbentuk $A^T A\, \mathbf{a} = A^T \mathbf{y}$.

Model tidak harus polinom. Bila hubungan data diperkirakan $y = b e^{ax}$ atau $y = b x^a$, kita dapat melinearkannya dengan logaritma: $\ln y = \ln b + ax$ atau $\ln y = \ln b + a \ln x$, lalu memakai garis kuadrat terkecil pada data yang ditransformasi. Perlu diingat bahwa cara ini meminimumkan galat pada skala logaritma, bukan pada y, sehingga data bernilai kecil mendapat bobot relatif lebih besar daripada pada kecocokan langsung.

Dari sisi praktik, persamaan normal untuk derajat tinggi buruk kondisinya: matriks $A^T A$ bisa nyaris singular dan galat pembulatan membesar, terutama bila x_i tidak diskalakan. Karena itu derajat dijaga rendah, data digeser dan diskalakan, atau dipakai basis ortogonal (seksi 8.2) serta faktorisasi QR. Seksi ini menjadi dasar untuk 8.2, yang memperluas gagasan kuadrat terkecil dari data diskret ke hampiran fungsi kontinu.

Konsep kunci

Galat kuadrat terkecil — Ukuran kecocokan $E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - P(x_i))^2$. Parameter model dipilih agar E minimum.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Persamaan normal — Sistem linear yang muncul dari $\partial E/\partial a_j = 0$. Untuk derajat n terdapat $n+1$ persamaan dengan $n+1$ tak diketahui.

Mengapa bukan interpolasi — Polinom interpolasi melewati data yang bergalat sehingga meniru galat itu dan berosilasi. Hampiran kuadrat terkecil meredam galat dengan menyerap kecenderungan umum data.

Galat minimaks dan simpangan mutlak — Alternatif ukuran galat yang kurang praktis: minimaks terlalu peka pada satu titik buruk, simpangan mutlak tidak terdiferensialkan sehingga tak menghasilkan sistem linear.

Keterunikan solusi — Jika paling sedikit $n+1$ nilai x_i berbeda, matriks persamaan normal nonsingular dan polinom derajat $\leq n$ terbaik tunggal.

Linearisasi model — Model seperti $y = be^{ax}$ diubah menjadi linear lewat $\ln$. Hasilnya meminimumkan galat pada skala logaritma, bukan skala y asli.

Kondisi buruk — Untuk derajat tinggi, persamaan normal sangat sensitif terhadap galat pembulatan. Skala ulang data, basis ortogonal, atau QR membantu.

Galat kuadrat terkecil (garis)

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)^2$$

Persamaan normal (garis)

$$a_0\, m + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

Koefisien a_1

$$a_1 = \frac{m\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Koefisien a_0

$$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{m\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Persamaan normal polinom derajat n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^{\,j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Algoritma: Kuadrat terkecil diskret polinom derajat n

1. Tentukan derajat $n < m-1$ dan pastikan ada sedikitnya $n+1$ nilai x_i yang berbeda. Bila perlu geser dan skalakan x_i agar berada di sekitar $[-1, 1]$.

2. Hitung jumlah $S_r = \sum_i x_i^r$ untuk $r = 0, \ldots, 2n$ dan $T_j = \sum_i y_i x_i^j$ untuk $j = 0, \ldots, n$.
3. Susun matriks $(n+1) \times (n+1)$ dengan entri S_{j+k} pada baris j kolom k dan ruas kanan T_j.
4. Selesaikan sistem dengan eliminasi Gauss berpivot (atau QR bila kondisinya buruk) untuk memperoleh $a_0, \ldots, a_n$.
5. Hitung galat $E = \sum_i (y_i - P_n(x_i))^2$ dan periksa residu terhadap pola yang tersisa.

Contoh 1: Garis kuadrat terkecil untuk tujuh titik data

Data pengukuran: $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan $y_i = 1{,}9;\ 3{,}2;\ 3{,}8;\ 5{,}1;\ 5{,}8;\ 7{,}3;\ 7{,}9$. Tentukan garis $P(x) = a_1 x + a_0$ yang meminimumkan jumlah kuadrat galat, beserta nilai galatnya.

Penyelesaian.

Hitung jumlah-jumlahnya dengan $m = 7$: $\sum x_i = 21$, $\sum y_i = 35{,}0$, $\sum x_i^2 = 91$, $\sum x_i y_i = 133{,}2$.

Penyebut bersama adalah $m\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 7(91) - 21^2 = 196$. Maka

$$a_1 = \frac{7(133{,}2) - 21(35{,}0)}{196} = \frac{197{,}4}{196} \approx 1{,}0071$$

$$a_0 = \frac{91(35{,}0) - (133{,}2)(21)}{196} = \frac{387{,}8}{196} \approx 1{,}9786$$

Jadi $P(x) \approx 1{,}0071x + 1{,}9786$. Galat kuadrat terkecilnya $E = \sum (y_i - P(x_i))^2 \approx 0{,}2386$. Periksa juga bahwa jumlah residu $\sum (y_i - P(x_i))$ sama dengan nol, ciri persamaan normal pertama.

Contoh 2: Hampiran parabola pada data simetris

Cocokkan polinom derajat dua $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ pada data (x_i, y_i): $(-2; 4{,}1),\ (-1; 1{,}2),\ (0; 0{,}3),\ (1; 0{,}8),\ (2; 3{,}9)$.

Penyelesaian.

Karena x_i simetris terhadap nol, semua jumlah pangkat ganjil lenyap: $\sum x_i = \sum x_i^3 = 0$. Sisanya $\sum x_i^2 = 10$, $\sum x_i^4 = 34$, dan $\sum y_i = 10{,}3$, $\sum x_i y_i = -0{,}8$, $\sum x_i^2 y_i = 34{,}0$.

Persamaan normal (8.3) dengan $n = 2$ menjadi

$$5a_0 + 10a_2 = 10{,}3$$

$$10a_1 = -0{,}8$$

$$10a_0 + 34a_2 = 34{,}0$$

Dari persamaan kedua $a_1 = -0{,}08$. Dua persamaan lain membentuk sistem 2×2 untuk a_0, a_2 dengan determinan $5(34) - 10(10) = 70$, sehingga $a_0 = 0{,}14571$ dan $a_2 = 0{,}95714$.

Jadi $P_2(x) \approx 0{,}1457 - 0{,}08x + 0{,}9571x^2$ dengan galat $E \approx 0{,}0823$. Garis lurus pada data yang sama akan memberi galat jauh lebih besar karena data jelas melengkung.

Contoh 3: Model eksponensial lewat linearisasi

Data $(1;3{,}1), (2;4{,}5), (3;6{,}8), (4;10{,}2), (5;15{,}1)$ tampak tumbuh secara eksponensial. Cocokkan model $y = be^{ax}$ dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat pada $\ln y$.

Penyelesaian.

Ambil logaritma: $\ln y = \ln b + ax$. Dengan $z_i = \ln y_i$ diperoleh $z = (1{,}1314,\ 1{,}5041,\ 1{,}9169,\ 2{,}3224,\ 2{,}7147)$, sehingga $\sum z_i = 9{,}5895$ dan $\sum x_i z_i = 32{,}7533$. Untuk $x_i = 1,\ \ldots,\ 5$: $\sum x_i = 15$, $\sum x_i^2 = 55$, penyebut $5(55) - 15^2 = 50$.

$$a = \frac{5(32{,}7533) - 15(9{,}5895)}{50} \approx 0{,}3985$$

$$\ln b = \frac{55(9{,}5895) - 15(32{,}7533)}{50} \approx 0{,}7224$$

Maka $b = e^{0{,}7224} \approx 2{,}0594$ dan model $y \approx 2{,}0594\, e^{0{,}3985x}$. Nilai model di x_i: $3{,}07,\ 4{,}57,\ 6{,}81,\ 10{,}14,\ 15{,}10$, cukup dekat dengan data. Catatan: cara ini meminimumkan galat pada $\ln y$, bukan pada y asli, sehingga hasilnya sedikit berbeda dari kecocokan eksponensial yang meminimumkan galat langsung pada y.

Kesalahan umum

• Menganggap kuadrat terkecil harus melewati titik data. Tujuannya meminimumkan jumlah kuadrat residu; kecocokan sempurna hanya terjadi bila data memang tepat pada model.

• Memilih derajat setinggi mungkin. Derajat $m - 1$ sama dengan interpolasi dan menghasilkan osilasi; selain itu, persamaan normal menjadi sangat buruk kondisinya.

• Meminimumkan galat pada $\ln y$ lalu menganggapnya sama dengan meminimumkan galat pada y. Keduanya masalah yang berbeda dan solusinya berbeda.

• Salah menghitung jumlah, misalnya mengganti $\sum x_i^2$ dengan $(\sum x_i)^2$. Selalu cek bahwa jumlah residu nol dan $\sum x_i r_i = 0$ pada garis hasil.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa polinom interpolasi derajat sembilan pada sepuluh titik data eksperimen bisa menjadi prediktor yang buruk di antara titik-titik data, sementara garis kuadrat terkecil tidak?
2. Bandingkan perilaku tiga ukuran galat (minimaks, simpangan mutlak, kuadrat) terhadap satu titik pencilan. Mana yang paling kuat dan mana yang paling mudah dihitung?
3. Bagaimana persamaan normal dapat ditafsirkan secara geometris sebagai proyeksi tegak lurus vektor $\mathbf{y}$ pada ruang kolom matriks A?
4. Kapan linearisasi lewat logaritma wajar dipakai, dan kapan sebaiknya digunakan kuadrat terkecil nonlinear?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Cocokkan garis kuadrat terkecil pada data $(0;1), (1;3), (2;4), (3;8)$.

Kunci: $\sum x = 6$, $\sum y = 16$, $\sum x^2 = 14$, $\sum xy = 35$; penyebut $4(14) - 36 = 20$.
$a_1 = (4 \cdot 35 - 6 \cdot 16)/20 = 2{,}2$, $a_0 = (14 \cdot 16 - 35 \cdot 6)/20 = 0{,}7$. Garis: $P(x) = 2{,}2x + 0{,}7$.

2. Tunjukkan bahwa hampiran kuadrat terkecil berbentuk konstanta $P(x) = a_0$ untuk data $y_1, \ldots, y_m$ adalah rata-rata data.

Kunci: $E = \sum (y_i - a_0)^2$, $E' = -2\sum (y_i - a_0) = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{m}\sum y_i$. Turunan kedua $2m > 0$ sehingga ini minimum.

3. Cocokkan model garis melalui titik asal $y = ax$ pada data $(1; 2{,}2), (2; 3{,}9), (3; 6{,}2), (4; 7{,}8)$.

Kunci: Minimumkan $\sum (y_i - ax_i)^2$: $a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{59{,}8}{30} \approx 1{,}9933$.

4. Berapa banyak persamaan normal untuk polinom derajat tiga, dan syarat minimal apa pada x_i agar solusinya tunggal?

Kunci: Ada $n + 1 = 4$ persamaan. Solusi tunggal bila terdapat sedikitnya empat nilai x_i yang berbeda (dan $m \geq 4$).

Web by: Steven Paulus Siahaan

8.2 Orthogonal Polynomials and Least Squares Approximation

Rujukan buku: halaman 510

Seksi sebelumnya mencocokkan model pada data diskret. Sekarang yang dihampiri adalah fungsi kontinu $f \in C[a,b]$ oleh polinom P_n berderajat paling tinggi n, dan ukuran kesalahannya berupa integral: $E = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$. Menurunkan E terhadap koefisien $a_0, \dots, a_n$ memberi $n+1$ persamaan normal $\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx$. Sistem ini selalu mempunyai solusi tunggal untuk f kontinu.

Namun jalan langsung ini bermasalah. Matriks sistemnya memiliki entri $\frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$; pada $[0,1]$ itulah matriks Hilbert, contoh klasik matriks yang sangat buruk kondisinya, sehingga galat pembulatan membengkak ketika n membesar. Selain itu, bila kita ingin menaikkan derajat dari n ke $n+1$, seluruh sistem harus diselesaikan ulang; kerja sebelumnya tidak terpakai.

Jalan keluarnya ialah memilih basis yang lebih baik. Himpunan fungsi $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ dikatakan bebas linear bila hanya kombinasi trivial yang menghasilkan fungsi nol. Himpunan polinom dengan φ_j berderajat tepat j selalu bebas linear, dan setiap polinom berderajat $\le n$ dapat ditulis tunggal sebagai kombinasi linear mereka. Jadi basis tidak harus $1, x, \dots, x^n$.

Ide utama: pilih basis yang ortogonal. Fungsi bobot w adalah fungsi terintegralkan yang tak negatif dan tidak nol identik pada sub-selang mana pun; ia menyatakan seberapa penting tiap bagian selang. Himpunan $\{\varphi_j\}$ disebut ortogonal pada $[a,b]$ terhadap w bila $\int_a^b w\,\varphi_j \varphi_k\,dx = 0$ untuk $j \neq k$ dan $\alpha_j = \int_a^b w \varphi_j^2 dx > 0$. Dengan basis ini persamaan normal bagi masalah berbobot $\int_a^b w\,[f - \sum a_k \varphi_k]^2 dx$ menjadi diagonal, sehingga $a_j = \frac{1}{\alpha_j} \int_a^b w(x)\,\varphi_j(x)\,f(x)\,dx, \qquad P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$ Tiap koefisien dihitung sendiri-sendiri, tidak perlu menyelesaikan sistem, dan menambah derajat hanya berarti menambah satu suku. Bila $\alpha_j = 1$ himpunannya disebut ortonormal.

Polinom ortogonal dibangun dengan proses Gram-Schmidt. Mulai dari $\varphi_0 \equiv 1$ dan $\varphi_1(x) = x - B_1$, lalu untuk $k \ge 2$ diperoleh rekursi tiga suku $\varphi_k(x) = (x - B_k)\varphi_{k-1}(x) - C_k \varphi_{k-2}(x)$, dengan $B_k = \frac{\int x w \varphi_{k-1}^2}{\int w \varphi_{k-1}^2}$ dan $C_k = \frac{\int x w \varphi_{k-1}\varphi_{k-2}}{\int w \varphi_{k-2}^2}$. Akibatnya φ_n ortogonal terhadap setiap polinom berderajat lebih rendah dari n. Untuk $w \equiv 1$ pada $[-1,1]$ hasilnya adalah polinom Legendre (dalam bentuk monik): $\varphi_2 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\varphi_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$, $\varphi_4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$. Polinom ini sudah dikenal dari penentuan simpul kuadratur Gauss pada seksi 4.7.

Kelebihan metode ini: stabil secara numerik, koefisien terpisah, dan derajat mudah dinaikkan. Kekurangannya: integral $\int w \varphi_j f$ harus dihitung (secara analitik atau dengan kuadratur), dan untuk selang umum $[a,b]$ polinom harus disesuaikan dengan transformasi linear. Seksi 8.3 melanjutkan dengan keluarga ortogonal lain, polinom Chebyshev, dengan bobot $1/\sqrt{1-x^2}$ yang memberi tekanan lebih pada ujung selang.

Konsep kunci

Persamaan normal kontinu — Dari $\partial E/\partial a_j = 0$ untuk $E = \int_a^b (f - P_n)^2 dx$ diperoleh $\sum_k a_k \int x^{j+k} dx = \int x^j f\,dx$, sistem dengan matriks Hilbert pada $[0,1]$.

Matriks Hilbert — Matriks dengan entri $\frac{1}{j+k+1}$; sangat buruk kondisinya sehingga solusi persamaan normal untuk derajat tinggi tidak dapat dipercaya.

Kebebasan linear — Polinom φ_j berderajat tepat j ($j = 0, \dots, n$) selalu bebas linear dan membentuk basis bagi polinom berderajat $\le n$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Fungsi bobot — Fungsi $w \geq 0$ terintegralkan, tidak nol identik pada sub-selang mana pun. Mengatur bagian selang yang lebih diutamakan dalam hampiran.

Ortogonalitas — $\int_a^b w\varphi_j\varphi_k\,dx = 0$ untuk $j \neq k$. Membuat persamaan normal diagonal.

Rekursi Gram-Schmidt — $\varphi_k = (x - B_k)\varphi_{k-1} - C_k\varphi_{k-2}$ menghasilkan polinom monik ortogonal secara bertahap.

Polinom Legendre — Polinom ortogonal untuk $w \equiv 1$ pada $[-1, 1]$:
$1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3},\ x^3 - \frac{3}{5}x,\ \ldots$ (bentuk monik).

Persamaan normal polinom kontinu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x)\,dx, \qquad j = 0,\ \ldots, n$$

Kondisi ortogonalitas

$$\int_a^b w(x)\,\varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad (j \neq k), \qquad \alpha_j = \int_a^b w(x)[\varphi_j(x)]^2 dx > 0$$

Koefisien kuadrat terkecil

$$a_j = \frac{\int_a^b w(x)\varphi_j(x)f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)[\varphi_j(x)]^2 dx} = \frac{1}{\alpha_j}\int_a^b w\,\varphi_j f\,dx$$

Rekursi Gram-Schmidt

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x - B_1,\ \varphi_k = (x - B_k)\varphi_{k-1} - C_k\varphi_{k-2}$$

Konstanta B_k dan C_k

$$B_k = \frac{\int x\,w\,\varphi_{k-1}^2 dx}{\int w\,\varphi_{k-1}^2 dx}$$

$$C_k = \frac{\int x\,w\,\varphi_{k-1}\varphi_{k-2} dx}{\int w\,\varphi_{k-2}^2 dx}$$

Algoritma: Hampiran kuadrat terkecil dengan polinom ortogonal

1. Tentukan selang $[a, b]$, bobot w, fungsi f, dan derajat n.
2. Bangun $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x - B_1$ dan $\varphi_k = (x - B_k)\varphi_{k-1} - C_k\varphi_{k-2}$ sampai $k = n$ dengan konstanta B_k, C_k dari integral berbobot.
3. Hitung $\alpha_j = \int_a^b w\varphi_j^2 dx$ untuk setiap $j = 0,\ \ldots, n$.
4. Hitung $a_j = \frac{1}{\alpha_j}\int_a^b w\varphi_j f\,dx$ (analitik atau dengan kuadratur).
5. Bentuk $P_n = \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j$. Untuk menaikkan derajat cukup menghitung φ_{n+1}, a_{n+1} dan menambah satu suku.

Contoh 1: Hampiran kuadratik e^x pada $[-1,1]$ dengan polinom Legendre

Tentukan polinom derajat ≤ 2 terbaik dalam arti kuadrat terkecil untuk $f(x)=e^x$ pada $[-1,1]$ dengan $w(x)\equiv 1$, memakai himpunan ortogonal $\varphi_0=1$, $\varphi_1=x$, $\varphi_2=x^2-\frac{1}{3}$.

Penyelesaian.

Hitung $\alpha_j=\int_{-1}^{1}\varphi_j^2\,dx$: $\alpha_0=2$, $\alpha_1=\frac{2}{3}$, $\alpha_2=\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx=\frac{8}{45}$.
Integral dengan f: $\int e^x dx=e-e^{-1}\approx 2{,}3504$, $\int xe^x dx=\frac{2}{e}\approx 0{,}7358$, $\int(x^2-\frac{1}{3})e^x dx\approx 0{,}09542$.
Koefisien $a_j=\frac{1}{\alpha_j}\int wf\varphi_j$: $a_0\approx 1{,}1752$, $a_1=\frac{3}{e}\approx 1{,}1036$, $a_2\approx 0{,}5367$.

Jadi $P_2(x)=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2\approx 0{,}9963+1{,}1036x+0{,}5367x^2$. Galat kuadratnya $\int_{-1}^{1}(e^x-P_2)^2dx\approx 0{,}001441$, sedangkan polinom linear $P_1=a_0+a_1x$ yang diperoleh dengan membuang suku terakhir memberi galat $0{,}05265$. Perhatikan P_1 tidak perlu dihitung ulang: ia hanyalah dua suku pertama P_2.

Contoh 2: Membangun polinom ortogonal dengan bobot $w(x)=x$ pada $[0,1]$

Gunakan proses Gram-Schmidt (Teorema 8.7) untuk menyusun $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ yang ortogonal pada $[0,1]$ terhadap bobot $w(x)=x$.

Penyelesaian.

Integral yang dipakai: $\int_0^1 x\cdot x^k dx=\frac{1}{k+2}$.
$\varphi_0=1$ dan $B_1=\frac{\int_0^1 x\cdot x\,dx}{\int_0^1 x\,dx}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$, sehingga $\varphi_1(x)=x-\frac{2}{3}$.
Untuk $k=2$: hitung $\int_0^1 x\cdot x\varphi_1\varphi_0\,dx$ dan $\int_0^1 x\varphi_1^2dx$ dengan aritmetika pecahan; hasilnya $B_2=\frac{8}{15}$ dan $C_2=\frac{\int_0^1 x\varphi_1^2dx}{\int_0^1 x\varphi_0^2dx}=\frac{1}{18}$.
Maka $\varphi_2(x)=(x-\frac{8}{15})\varphi_1(x)-\frac{1}{18}$. Setelah dijabarkan, $\varphi_2(x)=x^2-\frac{6}{5}x+\frac{3}{10}$. Pengecekan dengan aritmetika pecahan eksak memastikan $\int_0^1 x\varphi_i\varphi_j dx=0$ untuk $i\neq j$.

Contoh 3: Keuntungan basis ortogonal: menaikkan derajat tanpa menghitung ulang

Cari hampiran kuadrat terkecil derajat 1 untuk $f(x)=x^3$ pada $[-1,1]$ ($w\equiv 1$), lalu tentukan hampiran derajat 3 dengan memakai $\varphi_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x$.

Penyelesaian.

Dengan $\varphi_0=1$, $\varphi_1=x$: $a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^3dx=0$ karena integran ganjil, dan $a_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$. Jadi $P_1(x)=\frac{3}{5}x$.
Galatnya $\int_{-1}^{1}(x^3-\frac{3}{5}x)^2dx=\frac{2}{7}-2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{9}{25}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{175}\approx 0{,}0457$.
Untuk derajat 3 cukup menambah suku $a_3\varphi_3$ pada P_1 (suku $a_2\varphi_2$ bernilai nol karena paritas). Koefisien $a_3=\frac{\int x^3\varphi_3dx}{\int\varphi_3^2dx}$; karena $x^3=\varphi_3+\frac{3}{5}x$ dan $\varphi_3\perp\{1,x,x^2\}$, diperoleh $a_3=1$. Maka $P_3(x)=\frac{3}{5}x+\varphi_3(x)=x^3=f(x)$: fungsi polinom derajat 3 dihampiri secara eksak oleh derajat 3, dan P_1 tidak perlu dihitung ulang.

Kesalahan umum

• Menyelesaikan persamaan normal dengan basis $1, x, \ldots, x^n$ untuk n besar. Matriks Hilbert membuat hasil tidak akurat; gunakan basis ortogonal.

• Lupa membagi dengan $\alpha_j = \int w\varphi_j^2 dx$ saat menghitung a_j. Rumus $a_j = \int w\varphi_j f$ hanya berlaku bila basisnya ortonormal.

• Memakai polinom Legendre pada selang selain $[-1, 1]$ tanpa transformasi $t = \frac{2x-a-b}{b-a}$, sehingga ortogonalitas hilang.

• Mengira ortogonalitas bersifat mutlak. Ia selalu bergantung pada selang dan bobot: polinom yang ortogonal untuk $w \equiv 1$ tidak ortogonal untuk $w(x) = x$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa persamaan normal yang matriksnya diagonal jauh lebih baik, baik dari segi biaya maupun ketelitian, daripada matriks Hilbert?
2. Apa arti geometris ortogonalitas fungsi di bawah hasil kali dalam $\langle f, g\rangle = \int_a^b w f g\, dx$, dan bagaimana a_j ditafsirkan sebagai proyeksi?
3. Bagaimana pilihan fungsi bobot mengubah hasil hampiran? Berikan contoh bobot yang menekankan ujung selang.
4. Mengapa φ_n ortogonal terhadap semua polinom berderajat kurang dari n (Akibat 8.8)?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Susun $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ untuk $w \equiv 1$ pada $[0, 1]$ dengan rekursi Gram-Schmidt.

Kunci: $B_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_1 = x - \frac{1}{2}$; $B_2 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{\int x\,(x-\frac{1}{2})dx}{\int 1\,dx} = \frac{1}{12}$. Maka $\varphi_2 = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

2. Cari hampiran kuadrat terkecil linear untuk $f(x) = e^x$ pada $[-1, 1]$.

Kunci: $a_0 = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) = \sinh 1 \approx 1{,}1752$ dan $a_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{e} = \frac{3}{e} \approx 1{,}1036$; $P_1(x) \approx 1{,}1752 + 1{,}1036x$.

3. Tunjukkan bahwa hampiran kuadrat terkecil konstan untuk f pada $[a, b]$ dengan $w \equiv 1$ adalah nilai rata-rata $\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$.

Kunci: Dengan $\varphi_0 = 1$: $a_0 = \frac{\int_a^b f\,dx}{\int_a^b 1\,dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$.

4. Buktikan bahwa jika f fungsi ganjil pada $[-1, 1]$ dengan $w \equiv 1$, hampiran kuadrat terkecil P_n hanya memuat polinom ganjil.

Kunci: φ_j genap bila j genap dan ganjil bila j ganjil. Untuk j genap, $f\varphi_j$ ganjil sehingga $\int_{-1}^{1} f\varphi_j dx = 0$, jadi $a_j = 0$ dan hanya suku φ_j ganjil yang tersisa.

8.3 Chebyshev Polynomials and Economization of Power Series

Rujukan buku: halaman 518

Seksi 8.2 menunjukkan bahwa polinom ortogonal menyederhanakan hampiran kuadrat terkecil. Seksi ini mempelajari satu keluarga ortogonal yang khusus penting, polinom Chebyshev, dan dua penerapannya: memilih simpul interpolasi yang meminimumkan galat dan "menghemat" derajat deret pangkat.

Polinom Chebyshev jenis pertama didefinisikan lewat $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ untuk $x \in [-1, 1]$. Dengan $\theta = \arccos x$ kita punya $T_n = \cos n\theta$, dan identitas $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta$ memberi rekursi tiga suku $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ dengan $T_0 = 1$, $T_1 = x$. Dari sini $T_2 = 2x^2 - 1$, $T_3 = 4x^3 - 3x$, $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$. Derajat T_n tepat n dengan koefisien utama 2^{n-1} ($n \geq 1$), sehingga $\tilde{T}_n = 2^{1-n} T_n$ monik. Polinom ini ortogonal pada $[-1, 1]$ terhadap bobot $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: $\int_{-1}^{1} \frac{T_n T_m}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ untuk $n \neq m$, dan bernilai $\frac{\pi}{2}$ untuk $n = m \geq 1$ serta π untuk $n = m = 0$.

Sifat yang paling berguna: T_n memiliki n nol sederhana $\bar{x}_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, n$, di dalam $(-1, 1)$, dan mencapai ekstrem ± 1 secara bergantian di $n+1$ titik $\cos \frac{k\pi}{n}$. Teorema 8.10 menyatakan bahwa di antara semua polinom monik derajat n, $\tilde{T}_n$ memiliki norma maksimum terkecil pada $[-1, 1]$, yaitu $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Akibatnya pada interpolasi Lagrange. Galatnya $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$, dan hasil kali di sini monik berderajat $n+1$. Agar nilai maksimumnya sekecil mungkin, pilih x_k sebagai nol T_{n+1}. Pada $[-1, 1]$ diperoleh $|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max |f^{(n+1)}|}{2^n (n+1)!}$. Untuk selang umum $[a, b]$ simpul dipetakan dengan $x = \frac{(b-a)\tilde{x} + (a+b)}{2}$ dan batas dikalikan $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$. Simpul Chebyshev menekan fenomena Runge karena rapat di dekat ujung selang.

Penerapan kedua adalah ekonomisasi deret pangkat. Misalkan polinom P_n berderajat n dengan koefisien utama a_n menghampiri f pada $[-1, 1]$. Pengurangan $a_n \tilde{T}_n$ menghasilkan polinom berderajat $n-1$ yang berbeda dari P_n paling banyak $\frac{|a_n|}{2^{n-1}}$ pada $[-1, 1]$. Karena $\tilde{T}_n$ adalah polinom monik dengan simpangan terkecil, tidak ada cara lain menghilangkan suku berpangkat tertinggi dengan perubahan sekecil itu. Dibanding memotong deret begitu saja (yang menempatkan galat terbesar di ujung selang), galat disebar merata dengan osilasi sebesar $|a_n| 2^{1-n}$. Proses dapat diulang untuk menurunkan derajat lebih jauh selama galat tambahan masih dapat diterima. Penurunan derajat berarti lebih sedikit operasi per evaluasi.

Keterbatasan: semua hasil berlaku untuk $[-1, 1]$ (atau selang yang dipetakan linear ke sana), dan kita menganggap fungsi cukup mulus sehingga turunan ke-$(n+1)$ terbatas. Seksi 8.4 menggunakan polinom Chebyshev lagi untuk menyusun hampiran rasional.

Konsep kunci

Polinom Chebyshev — $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ pada $[-1, 1]$; dihasilkan rekursi $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$ dengan $T_0 = 1, T_1 = x$.

Ortogonalitas Chebyshev — Ortogonal pada $[-1, 1]$ terhadap bobot $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, yang menekankan ujung selang. Norma kuadratnya π untuk $n = 0$ dan $\frac{\pi}{2}$ untuk $n \geq 1$.

Nol dan titik ekstrem — Nol T_n ada n buah di $(-1, 1)$: $\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$. Ekstrem ± 1 terjadi bergantian di $\cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

Polinom Chebyshev monik — $\tilde{T}_n = 2^{1-n} T_n$. Di antara semua polinom monik derajat n ia memiliki norma maksimum minimum, yakni 2^{1-n} (Teorema 8.10).

Web by: Steven Paulus Siahaan

Simpul Chebyshev — Nol T_{n+1} dipakai sebagai simpul interpolasi untuk meminimumkan maksimum $\left|\prod(x - x_k)\right|$ pada galat Lagrange.

Ekonomisasi deret pangkat — Mengurangkan $a_n\tilde{T}_n$ dari polinom berderajat n menurunkan derajatnya dengan tambahan galat paling banyak $|a_n|2^{1-n}$.

Transformasi selang — Untuk $[a, b]$, pakai $x = \frac{(b-a)\tilde{x} + (a+b)}{2}$ dengan $\tilde{x} \in [-1, 1]$.

Definisi dan rekursi

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Nol T_n dan titik ekstrem

$$\bar{x}_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k = 1,\ \ldots, n; \qquad \cos\frac{k\pi}{n},\ k = 0,\ \ldots, n$$

Polinom monik dan normanya

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x), \qquad \max_{[-1,1]}|\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Batas galat dengan simpul Chebyshev

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{\max_{[-1,1]}|f^{(n+1)}|}{2^n\,(n+1)!}$$

Ortogonalitas

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \quad (n \neq m), \qquad \int_{-1}^{1}\frac{T_n^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}\ (n \ge 1)$$

Ekonomisasi

$$Q_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n\tilde{T}_n(x), \qquad \max_{[-1,1]}|P_n - Q_{n-1}| = \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

Algoritma: Ekonomisasi polinom (deret pangkat) dengan polinom Chebyshev

1. Pilih polinom P_n (mis. polinom Maclaurin) yang menghampiri f dengan galat ε_0 pada $[-1, 1]$ (pindahkan selang dengan transformasi linear bila perlu).
2. Susun $\tilde{T}_n = 2^{1-n}T_n$ dengan rekursi Chebyshev dan baca koefisien utama a_n dari P_n.
3. Hitung $Q_{n-1} = P_n - a_n\tilde{T}_n$; suku x^n lenyap.
4. Taksir galat total $\le \varepsilon_0 + \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$. Jika masih lebih kecil dari toleransi, ulangi langkah 2-3 untuk derajat berikutnya.
5. Kembalikan ke variabel asli bila selang telah ditransformasi.

Contoh 1: Simpul Chebyshev pada $[2,6]$ dan batas hasil kali simpul

Tentukan empat simpul interpolasi Chebyshev pada $[2,6]$, lalu bandingkan nilai maksimum $\left|\prod_{k=0}^{3}(x-x_k)\right|$ pada selang itu dengan simpul berjarak sama $2,\ \frac{10}{3},\ \frac{14}{3},\ 6$.

Penyelesaian.

Nol T_4 pada $[-1,1]$ adalah $\tilde{x}_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}$, $k=0,\ \ldots,3$. Petakan ke $[2,6]$ dengan $x=\frac{(2+6)+(6-2)\tilde{x}}{2}=4+2\tilde{x}$:

$$x_0=5{,}8478,\ x_1=4{,}7654,\ x_2=3{,}2346,\ x_3=2{,}1522.$$

Hasil kali $\prod(x-x_k)$ adalah polinom monik derajat 4 yang sama dengan $\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\tilde{T}_4(\tilde{x})$ dengan $\tilde{T}_4=\frac{T_4}{8}$, sehingga nilai maksimumnya $\frac{2^4}{2^3}=2$. Pencarian numerik pada 200001 titik memberi 2{,}0000, sesuai.

Untuk simpul berjarak sama maksimumnya 3{,}1605, sekitar 1{,}58 kali lebih besar. Karena suku galat interpolasi memuat hasil kali ini, simpul Chebyshev memberi batas galat yang lebih kecil.

Contoh 2: Interpolasi e^x derajat dua pada $[0,1]$

Interpolasi $f(x)=e^x$ pada $[0,1]$ dengan polinom derajat 2. Bandingkan galat maksimum untuk simpul Chebyshev dan simpul berjarak sama $0;\ 0{,}5;\ 1$, serta bandingkan dengan batas teoretis.

Penyelesaian.

Tiga simpul Chebyshev pada $[0,1]$: $x_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}$, yaitu $0{,}93301$, $0{,}50000$, $0{,}06699$.

Galat interpolasi $f(x)-P_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\prod(x-x_k)$. Hasil kali itu adalah $\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\tilde{T}_3$ dengan nilai maksimum $\frac{(1/2)^3}{2^2}=\frac{1}{32}$. Dengan $\max|f'''|=e$ pada $[0,1]$:

$$|f(x)-P_2(x)|\le\frac{e}{6}\cdot\frac{1}{32}\approx 0{,}01416$$

Galat maksimum yang sebenarnya (dievaluasi pada 10^5 titik): simpul Chebyshev $0{,}00987$, simpul berjarak sama $0{,}01442$. Keduanya di bawah batas, dan simpul Chebyshev lebih baik sekitar 1{,}46 kali.

Contoh 3: Ekonomisasi polinom Maclaurin $\sin x$

Polinom Maclaurin derajat 5 untuk $\sin x$ adalah $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. Turunkan polinom derajat 3 yang lebih akurat pada $[-1, 1]$ daripada pemotongan biasa $x - \frac{x^3}{6}$.

Penyelesaian.

Polinom Chebyshev monik derajat 5: $\tilde{T}_5(x) = \frac{T_5(x)}{16} = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x$. Koefisien utama P_5 adalah $\frac{1}{120}$, jadi kurangkan $\frac{1}{120}\tilde{T}_5$ agar suku x^5 hilang:

$$Q_3(x) = P_5(x) - \tfrac{1}{120}\tilde{T}_5(x) = \left(1 - \tfrac{1}{384}\right)x + \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{96}\right)x^3 \approx 0{,}99740x - 0{,}15625x^3$$

Perubahan maksimum terhadap P_5 hanya $\frac{1}{120 \cdot 16} \approx 0{,}000521$.

Galat maksimum pada $[-1, 1]$ (numerik): P_5: $0{,}000196$; Q_3: $0{,}000568$ (di bawah $\frac{1}{1920} + \frac{1}{5040} \approx 0{,}000719$); pemotongan $x - \frac{x^3}{6}$: $0{,}008138$. Jadi Q_3 sekitar 14{,}3 kali lebih akurat daripada pemotongan sederhana, pada derajat yang sama.

Kesalahan umum

• Memakai nol T_n sebagai simpul untuk polinom berderajat n. Interpolasi derajat n butuh $n+1$ simpul, yaitu nol T_{n+1}.

• Lupa mentransformasikan simpul dan batas galat ke $[a, b]$. Batas $\frac{1}{2^n(n+1)!}$ hanya untuk $[-1, 1]$; untuk $[a, b]$ dikalikan $\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$.

• Mengurangkan $a_n T_n$ (bukan $a_n \tilde{T}_n$) saat ekonomisasi. Yang harus dikurangkan adalah bentuk monik agar suku x^n tepat hilang.

• Mengira simpul Chebyshev selalu mengalahkan simpul berjarak sama untuk setiap fungsi. Ia meminimumkan batas galat terburuk, bukan galat pada setiap fungsi tertentu.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa hasil kali $\prod(x - x_k)$ pada galat interpolasi harus monik, dan apa kaitannya dengan Teorema 8.10?
2. Mengapa deret Maclaurin yang dipotong menimbulkan galat terbesar di ujung selang, sedangkan ekonomisasi menyebarnya merata?
3. Apa hubungan fakta bahwa T_n mencapai ekstrem bergantian $n+1$ kali dengan sifat minimalnya (dan teori hampiran minimaks)?
4. Mengapa bobot $1/\sqrt{1-x^2}$ cocok dengan sifat bahwa simpul Chebyshev menumpuk di dekat ujung selang?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tunjukkan $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ dengan rekursi, lalu tentukan nol-nolnya.

Kunci: $T_2 = 2x^2 - 1$; $T_3 = 2xT_2 - T_1 = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$. Nol: $x = 0, \ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, sesuai $\cos\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{5\pi}{6}$.

2. Berapa batas galat interpolasi $f(x) = \cos x$ pada $[-1, 1]$ dengan polinom derajat 4 yang memakai simpul Chebyshev?

Kunci: $n = 4$: $\frac{\max|f^{(5)}|}{2^4 \cdot 5!} \le \frac{\sin 1}{1920} \approx 0{,}000438$ (karena $|f^{(5)}(x)| = |\sin x| \le \sin 1$ pada $[-1, 1]$).

3. Ekonomisasi $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (polinom Maclaurin e^x) ke derajat 2 pada $[-1, 1]$.

Kunci: $\tilde{T}_3 = x^3 - \frac{3}{4}x$. $Q_2 = P_3 - \frac{1}{6}\tilde{T}_3 = 1 + \left(1 + \frac{1}{8}\right)x + \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{9}{8}x + \frac{1}{2}x^2$. Perubahan maksimum $\frac{1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24}$.

4. Tentukan tiga simpul Chebyshev pada $[1, 3]$.

Kunci: $x_k = 2 + \cos\frac{(2k+1)\pi}{6}$: $2{,}8660$; 2; $1{,}1340$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

8.4 Rational Function Approximation

Rujukan buku: halaman 528

Polinom hanya mampu menghampiri fungsi dengan baik pada selang yang tidak terlalu lebar dan tidak mampu meniru perilaku fungsi yang tak terbatas, misalnya yang punya kutub di dekat selang. Hampiran dengan fungsi rasional $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, hasil bagi dua polinom, jauh lebih fleksibel. Dengan jumlah parameter yang sama, bentuk rasional biasanya memberi galat lebih kecil dan memungkinkan lebar selang lebih besar. Harga yang dibayar adalah satu pembagian dan kemungkinan penyebut mendekati nol.

Bentuk umum: $r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_m x^m}$. Ada $N = n + m + 1$ parameter setelah dinormalkan dengan $q_0 = 1$. Hampiran Padé adalah hampiran rasional yang cocok dengan deret Maclaurin $f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ sebanyak mungkin suku: $f(x) - r_{n,m}(x) = O(x^{n+m+1})$. Jadi, hampiran Padé dengan $m = 0$ adalah polinom Maclaurin biasa.

Mencari koefisiennya: kalikan $f(x)q(x) - p(x)$ dan deretkan. Koefisien x^k adalah $\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} - p_k$ dengan $q_j = 0$ untuk $j > m$ dan $p_k = 0$ untuk $k > n$. Menyamakan koefisien $x^0, \ldots, x^n$ dengan nol memberi $p_k = \sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i}$, sedangkan koefisien $x^{n+1}, \ldots, x^{n+m}$ yang harus nol memberi sistem linear $m \times m$ untuk $q_1, \ldots, q_m$: $\sum_{i=0}^{m} a_{k-i}\, q_i = 0$ untuk $k = n+1, \ldots, n+m$. Setelah q_i diketahui, p_k langsung dihitung. Bila sistem singular, dikurangi m atau n hingga diperoleh bentuk tereduksi.

Contoh klasik: untuk e^x, $r_{1,1} = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}$ dan $r_{2,2} = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}$. Yang kedua mencocokkan lima koefisien, dan galatnya lebih kecil daripada polinom Maclaurin derajat 4 pada selang yang luas. Fungsi dengan kutub, seperti $\tan x$, hampir tidak dapat dihampiri polinom, namun $r_{3,2}$ untuk $\tan x$ hanya membutuhkan satu pembagian dan sangat akurat sampai mendekati kutub. Bentuk rasional juga dapat ditulis sebagai pecahan bersambung supaya evaluasinya efisien, dengan sedikit perkalian dan pembagian.

Kelemahan Padé: ia sangat tepat dekat $x = 0$ (titik ekspansi) dan galat membesar menjauhinya, mirip deret Taylor. Pada seluruh selang $[a, b]$, galat bisa terkonsentrasi di ujung. Untuk meratakan galat dipakai hampiran rasional Chebyshev: f dihampiri dengan $r_{n,m}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$, $q_0 = 1$, dengan T_k polinom Chebyshev dari seksi 8.3. Karena $T_i T_j = \frac{1}{2}(T_{i+j} + T_{|i-j|})$, perkalian $f \cdot q$ dapat dihitung dalam basis Chebyshev, lalu koefisien T_k untuk $k = n+1, \ldots, n+m$ dipaksa nol. Hasilnya cocok dengan deret Chebyshev f sebanyak mungkin suku, sehingga galat bersifat osilasi merata pada $[-1, 1]$, mendekati hampiran minimaks.

Ringkasnya: pakai Padé untuk hampiran dekat satu titik, Chebyshev rasional untuk hampiran seragam pada selang, dan polinom bila fungsinya mulus dan selangnya kecil. Hampiran rasional dipakai di pustaka matematika untuk fungsi dasar karena akurat dan murah. Seksi 8.5 beralih ke hampiran fungsi periodik dengan polinom trigonometri.

Konsep kunci

Fungsi rasional — $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dengan p, q polinom. Mampu meniru kutub dan perilaku asimtotik yang tidak mungkin ditiru polinom.

Hampiran Padé $r_{n,m}$ — Rasional dengan pembilang derajat n dan penyebut derajat m ($q_0 = 1$) yang cocok dengan deret Maclaurin f hingga suku x^{n+m}.

Sistem untuk penyebut — $\sum_{i=0}^{m} a_{k-i} q_i = 0$ untuk $k = n+1, \ldots, n+m$; setelah q_i diketahui, $p_k = \sum_{i \leq k} a_i q_{k-i}$ untuk $k = 0, \ldots, n$.

Banyak parameter — Setelah normalisasi $q_0 = 1$ ada $n + m + 1$ parameter, sama dengan jumlah koefisien Maclaurin yang dicocokkan.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Titik ekspansi — Padé paling akurat di dekat titik ekspansi dan galat dapat membesar di ujung selang yang jauh.

Hampiran rasional Chebyshev — Memakai basis T_k pada pembilang dan penyebut; galat tersebar merata sehingga mendekati hampiran minimaks pada $[-1, 1]$.

Bentuk pecahan bersambung — Penulisan rasional sebagai pecahan bersambung mengurangi jumlah operasi dan memperbaiki stabilitas evaluasi.

Bentuk hampiran rasional

$$r_{n,\,m}(x) = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^{\,n}}{1 + q_1 x + \cdots + q_m x^{\,m}}$$

Syarat Padé

$$f(x) - r_{n,\,m}(x) = O(x^{\,n+m+1}) \iff f(x)q(x) - p(x) = O(x^{\,n+m+1})$$

Koefisien pembilang

$$p_k = \sum_{i\,=\,0}^{k} a_i \, q_{k-i}, \qquad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n$$

Sistem untuk penyebut

$$\sum_{i\,=\,0}^{m} a_{k-i} \, q_i = 0, \qquad k = n+1,\,\ldots,\,n+m \quad (q_0 = 1,\;\; a_j = 0 \text{ untuk } j < 0)$$

Hasil kali Chebyshev

$$T_i(x)T_j(x) = \tfrac{1}{2}\left[T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)\right]$$

Bentuk rasional Chebyshev

$$r_{n,\,m}(x) = \frac{\sum_{k\,=\,0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k\,=\,0}^{m} q_k T_k(x)}, \qquad q_0 = 1$$

Algoritma: Menyusun hampiran Padé r_{n,m}

1. Tentukan n, m dan hitung koefisien Maclaurin $a_0,\,\ldots,\,a_{n+m}$ dari f (nilai $a_j = 0$ untuk $j < 0$).
2. Susun sistem $m \times m$: $\sum_{i\,=\,1}^{m} a_{k-i} q_i = -a_k$ untuk $k = n+1,\,\ldots,\,n+m$, dengan $q_0 = 1$.
3. Selesaikan untuk $q_1,\,\ldots,\,q_m$ (eliminasi Gauss). Jika singular, kurangi m atau n.
4. Hitung $p_k = \sum_{i\,=\,0}^{\min(k,\,m)} a_{k-i} q_i$ untuk $k = 0,\,\ldots,\,n$.
5. Evaluasi $r_{n,\,m}(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dengan Horner (atau pecahan bersambung); periksa $q(x) \neq 0$ pada selang yang dipakai.

Contoh 1: Hampiran Padé $r_{1,\,1}$ dan $r_{2,\,2}$ untuk $\ln(1+x)$

Deret Maclaurin $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$. Tentukan hampiran Padé $r_{1,1}(x) = \frac{p_0 + p_1 x}{1 + q_1 x}$ dan bandingkan dengan polinom Maclaurin pada $x = 1$.

Penyelesaian.

Koefisien deret: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}$. Syarat $f - r = O(x^3)$ ($n + m + 1 = 3$ koefisien cocok) berarti $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)(1 + q_1 x) = p_0 + p_1 x + O(x^3)$. Cocokkan pangkat:

x^0: $p_0 = a_0 = 0$.

x^1: $p_1 = a_1 + a_0 q_1 = 1$.

x^2: $0 = a_2 + a_1 q_1 = -\frac{1}{2} + q_1 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}$.

Jadi $r_{1,1}(x) = \frac{x}{1 + x/2} = \frac{2x}{2 + x}$. Pada $x = 1$: $r_{1,1}(1) = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667$, sedangkan $\ln 2 \approx 0{,}6931$ dan polinom Maclaurin derajat 2 hanya memberi $0{,}5000$.

Dengan cara yang sama untuk $r_{2,2}$ (sistem 2×2 untuk q_1, q_2) diperoleh $r_{2,2}(x) = \frac{x + x^2/2}{1 + x + x^2/6} = \frac{6x + 3x^2}{6 + 6x + x^2}$, dan $r_{2,2}(1) = \frac{9}{13} \approx 0{,}6923$, galat hanya $0{,}00084$ (bandingkan Maclaurin derajat 4: $0{,}5833$).

Contoh 2: Hampiran Padé $r_{3,2}$ untuk $\tan x$

Dengan $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$ (hanya pangkat ganjil), tentukan $r_{3,2}(x) = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3}{1 + q_1 x + q_2 x^2}$ dan bandingkan dengan polinom Maclaurin derajat 5 di $x = 1$ dan $x = 1{,}2$.

Penyelesaian.

Perlu $n + m + 1 = 6$ koefisien cocok: $a_0, \ldots, a_5 = 0, 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{15}$. Persamaan untuk q_1, q_2 berasal dari pangkat x^4 dan x^5 (di mana ruas kanan nol karena $n = 3$):

x^4: $a_4 + a_3 q_1 + a_2 q_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 0$.

x^5: $a_5 + a_4 q_1 + a_3 q_2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{15} + \frac{1}{3} q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = -\frac{2}{5}$.

Lalu $p_0 = 0$, $p_1 = a_1 = 1$, $p_2 = a_2 + a_1 q_1 = 0$, $p_3 = a_3 + a_2 q_1 + a_1 q_2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{15}$.

Hasil: $r_{3,2}(x) = \frac{x - x^3/15}{1 - 2x^2/5}$. Nilainya: di $x = 1$, $\frac{14}{9} \approx 1{,}5556$ (sebenarnya $\tan 1 \approx 1{,}5574$; Maclaurin derajat 5: $1{,}4667$). Di $x = 1{,}2$: Padé $2{,}5585$, $\tan 1{,}2 \approx 2{,}5722$, Maclaurin $2{,}1078$. Hampiran rasional jauh lebih baik, terutama mendekati titik singular $x = \frac{\pi}{2}$.

Contoh 3: Padé $r_{2,2}$ untuk e^x versus polinom Maclaurin derajat 4

Kedua hampiran memakai lima koefisien Maclaurin. Cari $r_{2,2}$ untuk e^x dan bandingkan nilainya di $x=1$ dan $x=0{,}5$.

Penyelesaian.

Koefisien $a_k = \frac{1}{k!}$. Persamaan q_1, q_2: dari x^3: $a_3 + a_2 q_1 + a_1 q_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{2} q_1 + q_2 = 0$; dari x^4: $a_4 + a_3 q_1 + a_2 q_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{24} + \frac{1}{6} q_1 + \frac{1}{2} q_2 = 0$. Eliminasi memberi $q_1 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{1}{12}$. Kemudian $p_0 = 1$, $p_1 = a_1 + q_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = a_2 + a_1 q_1 + q_2 = \frac{1}{12}$.

$$r_{2,2}(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2}$$

Di $x=1$: $r_{2,2} = \frac{19}{7} \approx 2{,}7143$, Maclaurin $2{,}7083$, nilai sebenarnya $e \approx 2{,}7183$ (galat $0{,}00400$ versus $0{,}00995$). Di $x=0{,}5$: $r_{2,2} = 1{,}648649$, Maclaurin $1{,}648438$, sebenarnya $1{,}648721$. Hampiran Padé lebih akurat pada jumlah parameter yang sama.

Kesalahan umum

• Menganggap hampiran Padé selalu lebih baik daripada polinom Maclaurin di seluruh selang. Keunggulannya jelas di dekat titik ekspansi, tetapi bisa meleset jauh bila penyebut mendekati nol.

• Salah menghitung banyaknya koefisien deret yang diperlukan: untuk $r_{n,m}$ dibutuhkan $a_0, \ldots, a_{n+m}$, bukan hanya $a_0, \ldots, a_n$.

• Lupa menetapkan $q_0 = 1$ atau memperlakukan a_j dengan indeks negatif sebagai nilai bukan nol. Itu mengacaukan sistem untuk q_i.

• Tidak memeriksa penyebut $q_m(x)$ di selang yang dipakai. Kutub palsu (nol penyebut) dapat membuat hasil tak berarti.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa fungsi dengan kutub (misalnya $\tan x$) lebih alami dihampiri rasional daripada polinom?
2. Apa persamaan dan perbedaan antara hampiran Padé dan hampiran rasional Chebyshev dalam hal lokasi galat terbesar?
3. Bagaimana hubungan antara hampiran Padé dengan $m=0$ dan deret Maclaurin? Apa yang terjadi pada jumlah parameter?
4. Kapan sebaiknya memilih polinom, kapan rasional? Pertimbangkan biaya evaluasi (jumlah perkalian dan satu pembagian).

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan $r_{1,1}$ untuk e^x dan hitung nilainya di $x=1$.

Kunci: $a = (1, 1, \frac{1}{2})$. $q_1 = -a_2/a_1 = -\frac{1}{2}$, $p_0 = 1$, $p_1 = a_1 + q_1 = \frac{1}{2}$. $r_{1,1} = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}$, $r_{1,1}(1) = 3$ (sebenarnya $e \approx 2{,}7183$).

2. Untuk $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots$ tentukan $r_{1,1}$.

Kunci: $q_1 = -a_2/a_1 = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$, $p_0 = 1$, $p_1 = a_1 + q_1 = \frac{3}{4}$. $r_{1,1}(x) = \frac{1 + \frac{3}{4}x}{1 + \frac{1}{4}x} = \frac{4 + 3x}{4 + x}$. Di $x=1$: $\frac{7}{5} = 1{,}4$ ($\sqrt{2} \approx 1{,}4142$).

3. Berapa parameter bebas pada $r_{3,2}$ setelah $q_0 = 1$, dan koefisien deret berapa yang diperlukan?

Kunci: $n + m + 1 = 6$ parameter; diperlukan $a_0, \ldots, a_5$.

4. Apakah $r_{2,2}$ untuk e^x memiliki kutub real? (penyebutnya $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}$)

Kunci: Tidak. Diskriminan penyebut $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} < 0$, jadi nol-nolnya kompleks dan penyebut selalu positif; hampiran terdefinisi untuk semua x real.

Web by: Steven Paulus Siahaan

8.5 Trigonometric Polynomial Approximation

Rujukan buku: halaman 538

Fungsi periodik, seperti gelombang bunyi, sinyal listrik, atau data musiman, kurang cocok dihampiri polinom biasa. Hampiran yang wajar adalah polinom trigonometri, kombinasi linear dari $1, \cos kx, \sin kx$. Seksi ini memakai gagasan kuadrat terkecil dan ortogonalitas dari seksi 8.2 pada keluarga fungsi trigonometri; hasilnya adalah deret Fourier terpotong. Tanpa kehilangan keumuman, kita bekerja pada $[-\pi, \pi]$ dan fungsi berperiode 2π (selang lain dipetakan dengan perubahan variabel linear).

Keluarga $\{1, \cos x, \cos 2x, \ \dots, \sin x, \sin 2x, \ \dots\}$ ortogonal pada $[-\pi, \pi]$ terhadap bobot $w \equiv 1$. Dengan identitas hasil kali-ke-jumlah, misalnya $\cos jx \cos kx = \tfrac{1}{2}[\cos(j-k)x + \cos(j+k)x]$, diperoleh $\int \cos jx \cos kx \, dx = 0$ untuk $j \neq k$, $\int \cos^2 kx \, dx = \pi$ ($k \geq 1$), $\int \sin^2 kx \, dx = \pi$, $\int \cos jx \sin kx \, dx = 0$ untuk semua j, k, dan $\int 1 \, dx = 2\pi$. Dengan Teorema 8.6, polinom trigonometri derajat n terbaik dalam arti kuadrat terkecil untuk $f \in C[-\pi, \pi]$ ialah $$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \, dx$$ Faktor $\tfrac{1}{2}$ pada a_0 ada agar rumus a_k berlaku seragam untuk $k = 0$. Untuk $n \to \infty$ diperoleh deret Fourier. Fungsi genap hanya memuat kosinus dan fungsi ganjil hanya memuat sinus, sehingga pemeriksaan paritas menghemat banyak hitungan. Bila f mulus, koefisien meluruh cepat; bila f memiliki loncatan, koefisien hanya meluruh seperti $\frac{1}{k}$ dan muncul fenomena Gibbs di dekat loncatan.

Dalam praktik, f hanya diketahui di titik-titik diskret, dan integral diganti jumlah. Pilih $2m$ titik berjarak sama $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$, $j = 0, 1, \ \dots, \ 2m-1$. Pada himpunan titik ini fungsi basis juga ortogonal terhadap jumlah $\sum_{j} \varphi_k(x_j)\varphi_l(x_j)$ untuk indeks yang dibatasi ($k, l \leq m$ dengan $\sin mx_j = 0$). Akibatnya, polinom trigonometri diskret kuadrat terkecil mempunyai koefisien $a_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j$ dan $b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$, dan untuk $n < m$ polinom $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ meminimumkan $\sum_{j} [y_j - S_n(x_j)]^2$. Ini adalah penerapan langsung dari rumus kontinu dengan integral diganti aturan trapesium.

Notasi kompleks memudahkan analisis: dengan rumus Euler $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, fungsi basis menjadi e^{ikx}, dan jumlahnya $\sum_{j} e^{ikx_j} e^{-ilx_j} = 0$ untuk $k \neq l$ (modulo $2m$). Ini menjadi dasar transformasi Fourier diskret yang dipercepat pada seksi 8.6.

Hal yang perlu diperhatikan: derajat n tidak boleh melampaui sekitar separuh banyak titik; frekuensi yang lebih tinggi menyamar sebagai frekuensi rendah (aliasing), sehingga koefisien diskret hanya mendekati koefisien kontinu. Dibandingkan polinom algebraik, hampiran trigonometri jauh lebih cocok untuk fungsi periodik dan menghindari masalah osilasi tepi selang. Kelemahannya: bila fungsinya tidak periodik (nilai $f(-\pi) \neq f(\pi)$), terjadi loncatan periodik yang memperlambat konvergensi.

Konsep kunci

Polinom trigonometri — Kombinasi linear $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, berperiode 2π.

Ortogonalitas trigonometri — Pada $[-\pi, \pi]$, $\cos jx$ dan $\sin kx$ saling ortogonal untuk $w \equiv 1$. Norma kuadrat tiap fungsi bukan nol adalah π (dan 2π untuk konstanta 1).

Koefisien Fourier — $a_k = \frac{1}{\pi}\int f \cos kx$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int f \sin kx$; hasil penerapan Teorema 8.6, bukan rumus baru.

Paritas — Fungsi genap: semua $b_k = 0$. Fungsi ganjil: semua $a_k = 0$. Memeriksa paritas menghemat banyak integral.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Kuadrat terkecil diskret — Titik berjarak sama $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$, $j = 0,\ \ldots,\ 2m-1$; koefisien menjadi jumlah $\frac{1}{m}\sum y_j \cos kx_j$ dan $\frac{1}{m}\sum y_j \sin kx_j$.

Aliasing — Dengan $2m$ titik, frekuensi di atas m tidak dapat dibedakan dari frekuensi rendah, sehingga koefisien diskret hanya hampiran koefisien kontinu.

Rumus Euler — $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Memungkinkan menulis polinom trigonometri sebagai jumlah eksponensial kompleks.

Polinom trigonometri derajat n

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Koefisien kontinu

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

Titik diskret

$$x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}, \qquad j = 0, 1,\ \ldots,\ 2m-1$$

Koefisien diskret

$$a_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j, \qquad b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$$

Rumus Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Hasil kali-ke-jumlah

$$\cos jx \cos kx = \tfrac{1}{2}[\cos(j-k)x + \cos(j+k)x]$$

Algoritma: Polinom trigonometri kuadrat terkecil diskret

1. Petakan selang data ke $[-\pi, \pi]$, pilih m dan titik $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$ untuk $j = 0,\ \ldots,\ 2m-1$, dan peroleh $y_j = f(x_j)$.
2. Pilih derajat $n < m$.
3. Hitung $a_k = \frac{1}{m}\sum_j y_j \cos kx_j$ untuk $k = 0,\ \ldots,\ n$ dan $b_k = \frac{1}{m}\sum_j y_j \sin kx_j$ untuk $k = 1,\ \ldots,\ n$.
4. Susun $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.
5. Periksa galat $\sum_j [y_j - S_n(x_j)]^2$ dan kembalikan ke variabel asli.

Contoh 1: Polinom trigonometri kuadrat terkecil untuk $f(x) = x^2$ pada $[-\pi, \pi]$

Tentukan $S_3(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ yang meminimumkan $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_3(x)]^2 dx$ untuk $f(x) = x^2$, lalu hitung $S_3(\frac{\pi}{2})$.

Penyelesaian.

Karena f genap, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx\, dx = 0$ (integran ganjil). Untuk koefisien kosinus:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Dengan integral parsial dua kali, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\, dx = \frac{4(-1)^k}{k^2}$, sehingga $a_1 = -4$, $a_2 = 1$, $a_3 = -\frac{4}{9}$.

Maka

$$S_3(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x$$

Di $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, jadi $S_3(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{3} - 1 \approx 2{,}2899$, sedangkan $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} \approx 2{,}4674$.

Contoh 2: Kuadrat terkecil diskret dengan 8 titik

Ambil $m = 4$ dan $2m = 8$ titik $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{4}$, $j = 0, \ldots, 7$, dengan data $y_j = x_j^2$. Tentukan polinom trigonometri diskret kuadrat terkecil $S_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\sin x + b_2\sin 2x$.

Penyelesaian.

Koefisien diskret: $a_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{7} y_j \cos kx_j$, $b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{7} y_j \sin kx_j$. Dihitung langsung:
$a_0 = 6{,}7854$, $a_1 = -4{,}2121$, $a_2 = 1{,}2337$, $b_1 \approx -0{,}000000$, $b_2 \approx 0{,}000000$.

Nilai b_k nol karena titik x_j dan $-x_j$ ($j \neq 0, 4$) memberi y sama sedangkan sinus berlawanan tanda; sisanya $x = -\pi$ dan $x = 0$ memberi $\sin kx = 0$. Maka

$$S_2(x) \approx 3{,}3927 - 4{,}2121\cos x + 1{,}2337\cos 2x$$

Karena $m = 4$ dan $n = 2 < m$, kolom-kolom basis ortogonal pada 8 titik, sehingga hasil ini identik dengan penyelesaian kuadrat terkecil langsung (diverifikasi numerik). Bandingkan dengan koefisien kontinu $\frac{\pi^2}{3} \approx 3{,}2899$, -4, 1: nilai diskret dekat tetapi tidak sama karena aliasing dari frekuensi yang lebih tinggi.

Contoh 3: Galat kuadrat S_n untuk x^2 dan hubungan Parseval

Hitung galat kuadrat $\int_{-\pi}^{\pi}[x^2 - S_n(x)]^2 dx$ untuk $n = 1, 2, 3$.

Penyelesaian.

Karena $\cos kx$ ortogonal pada $[-\pi, \pi]$ dengan norma kuadrat π, galat kuadrat sama dengan jumlah kuadrat koefisien yang dibuang dikalikan π (kesamaan Parseval):

$$E_n = \pi \sum_{k>n} a_k^2 = 16\pi \sum_{k>n} \frac{1}{k^4}$$

Dengan $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$: $E_1 \approx 4{,}1380$, $E_2 \approx 0{,}9964$, $E_3 \approx 0{,}3759$. Galat turun cepat karena koefisien meluruh seperti $\frac{1}{k^2}$ (fungsi x^2 periodik-nya kontinu). Integrasi numerik langsung memberi nilai yang sama. Bandingkan dengan ($f = x$): koefisiennya hanya meluruh seperti $\frac{1}{k}$ karena loncatan di $\pm\pi$, sehingga konvergensinya jauh lebih lambat.

Kesalahan umum

• Mencampur rumus: memakai $\frac{1}{\pi}\int$ untuk koefisien diskret atau $\frac{1}{m}\sum$ untuk koefisien kontinu. Normalisasi harus cocok dengan jenis hitungan.

• Lupa faktor $\frac{1}{2}$ pada $\frac{a_0}{2}$ sehingga suku konstan menjadi dua kali lipat nilai yang benar.

• Menganggap f periodik padahal $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Perpanjangan periodik memiliki loncatan dan konvergensi memburuk.

• Memilih derajat n sebesar atau lebih besar dari m pada kasus diskret, lalu mengira koefisien tambahan bermakna; padahal terjadi aliasing.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa fungsi periodik lebih tepat dihampiri polinom trigonometri daripada polinom algebraik, terutama di sekitar ujung selang?
2. Bagaimana paritas fungsi menyederhanakan koefisien Fourier? Berikan contoh fungsi genap dan ganjil.
3. Apa yang dimaksud aliasing dan bagaimana ia berkaitan dengan jumlah titik $2m$?
4. Bandingkan laju peluruhan koefisien untuk fungsi yang mulus dan untuk fungsi dengan loncatan. Apa dampaknya pada banyak suku yang dibutuhkan?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan S_3 untuk $f(x) = x$ pada $[-\pi, \pi]$.

Kunci: f ganjil: $a_k = 0$ dan $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$. $S_3(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x$.

2. Tentukan koefisien a_0, a_1, b_1 untuk $f(x) = \cos^2 x$ tanpa integral.

Kunci: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. Jadi $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$ ($a_0 = 1$), $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ (hanya $a_2 = \frac{1}{2}$).

3. Berapa banyak titik $2m$ minimal agar suku $\sin 3x$ dapat dibedakan dari frekuensi lain pada kuadrat terkecil diskret ($n = 3 < m$)?

Kunci: Perlu $n < m$ sehingga $m \geq 4$ dan $2m \geq 8$ titik.

4. Tunjukkan bahwa $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 5x\,dx = 0$.

Kunci: $\cos 2x \cos 5x = \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos 7x]$; integral $\cos kx$ pada $[-\pi, \pi]$ bernilai $\frac{2\sin k\pi}{k} = 0$ untuk bilangan bulat $k \neq 0$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

8.6 Fast Fourier Transforms

Rujukan buku: halaman 547

Bagian 8.5 menunjukkan bahwa data berjarak sama $x_j = -\pi + \frac{j}{m}\pi$, $j = 0, 1, \ldots, 2m-1$, dapat dihampiri oleh polinomial trigonometrik, dan bahwa koefisiennya berbentuk jumlah diskret. Masalah yang dibahas di sini adalah biaya hitungnya. Bila koefisien dihitung langsung dari definisinya, setiap koefisien memerlukan jumlah $2m$ suku, sedangkan koefisiennya ada sekitar $2m$ buah, sehingga totalnya kira-kira $(2m)^2$ perkalian dan penjumlahan. Untuk ribuan titik data (sinyal audio, citra, medan antena) angkanya menjadi jutaan operasi, dan galat pembulatan yang menumpuk dapat mengalahkan galat hampirannya sendiri. Transformasi Fourier cepat (FFT) adalah cara menyusun ulang perhitungan yang sama persis sehingga biayanya turun menjadi orde $m \log_2 m$.

Polinomial interpolasi pada $2m$ titik tersebut dapat ditulis sebagai $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_m}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{m-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ dengan $a_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j$ dan $b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$. Faktor $\frac{1}{2}$ pada suku pertama dan terakhir muncul karena untuk $k = 0$ dan $k = m$ jumlah kuadrat $\cos kx_j$ pada $2m$ titik bernilai $2m$, bukan m. Karena galat kuadrat terkecil di titik data sama dengan nol, polinomial ini sekaligus interpolan, dan dengan $2m$ titik tepat $2m$ koefisien bebas ($a_0, \ldots, a_m$ dan $b_1, \ldots, b_{m-1}$) terpakai.

Ide pertama adalah memakai bilangan kompleks. Definisikan $c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}$ untuk $k = 0, 1, \ldots, 2m-1$. Karena $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$, kita punya $e^{ikx_j} = e^{-ik\pi} e^{ik\pi j/m} = (-1)^k e^{ik\pi j/m}$, sehingga

$$a_k + i b_k = \frac{(-1)^k}{m}\, c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

dan $b_0 = b_m = 0$. Jadi cukup menghitung bilangan kompleks c_k; bagian real dan imajinernya (dengan tanda $(-1)^k$) memberikan koefisien kosinus dan sinus. Untuk data real berlaku $c_{2m-k} = \overline{c_k}$, jadi hanya separuh c_k yang benar-benar baru.

Ide kedua, inti Cooley-Tukey, adalah memisahkan indeks genap dan ganjil. Misalkan $m = 2^p$. Untuk $k = 0, \ldots, m-1$, suku dengan indeks j pada c_k dan c_{m+k} hanya berbeda faktor $e^{i\pi j} = (-1)^j$. Maka $c_k + c_{m+k}$ meniadakan semua suku ganjil dan $c_k - c_{m+k}$ meniadakan semua suku genap. Hasilnya, dengan $E_k = \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)}$ dan $O_k = e^{ik\pi/m}\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)}$,

$$c_k = E_k + O_k, \qquad c_{m+k} = E_k - O_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Jumlah E_k dan $\sum y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)}$ berbentuk persis sama dengan jumlah awal, hanya saja m diganti $m/2$ (panjang data separuhnya). Jadi satu transformasi berukuran $2m$ diubah menjadi dua transformasi berukuran m ditambah m kali "kupu-kupu" $(E_k, O_k) \mapsto (E_k + O_k, E_k - O_k)$ yang masing-masing memerlukan satu perkalian dengan faktor $e^{ik\pi/m}$. Karena m pangkat dua, pemisahan dapat diulang sampai ukuran terkecil.

Setelah pemisahan berulang, banyak perkalian kompleks turun dari $(2m)^2$ menjadi kira-kira $3m + m\log_2 m$ (menurut cara hitung buku, yang juga menghitung perkalian dengan ± 1), dan banyak penjumlahan sebanding. Inilah orde $O(m \log_2 m)$. Untuk $m = 512$ (1024 titik) penghematannya sekitar 170 kali lipat, dan makin besar untuk m yang lebih besar. Selain cepat, FFT lebih teliti karena operasinya jauh lebih sedikit sehingga galat pembulatan tidak menumpuk.

Beberapa catatan praktis. Pertama, versi paling sederhana mensyaratkan jumlah data berupa pangkat dua; ukuran lain ditangani dengan memfaktorkan ke bilangan prima kecil atau menambah nol (zero padding). Kedua, pustaka seperti NumPy memakai konvensi berbeda ($e^{-2\pi ijk/N}$ dengan simpul mulai dari 0 dan tanpa pergeseran $-\pi$), sehingga

Web by: Steven Paulus Siahaan

hasilnya harus disesuaikan dengan faktor $(-1)^k$ dan konjugat sebelum dibandingkan dengan rumus buku. Ketiga, transformasi balik (dari koefisien kembali ke data) memakai struktur yang sama dengan tanda eksponen dibalik dan pembagian $2m$, sehingga juga cepat. Keempat, FFT hanya mempercepat perhitungan; hampirannya identik dengan interpolasi trigonometrik biasa, jadi sifat-sifat seperti osilasi bila data tidak periodik tetap berlaku.

Konsep kunci

Interpolasi trigonometrik $2m$ titik — Polinomial S_m dengan $2m$ koefisien yang melalui (x_j, y_j), $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$. Koefisiennya sama dengan koefisien kuadrat terkecil diskret, dengan suku a_0 dan a_m diberi faktor $\frac{1}{2}$.

Koefisien kompleks c_k — $c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}$. Satu bilangan kompleks membawa pasangan (a_k, b_k) lewat $a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k$, dan rumus Euler $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ menjembatani keduanya.

Biaya langsung — Menghitung $2m$ koefisien dengan jumlah $2m$ suku memerlukan sekitar $(2m)^2$ operasi kompleks. Ini mahal dan menumpuk galat pembulatan untuk data besar.

Pemisahan genap-ganjil — Jumlah $c_k \pm c_{m+k}$ hanya memuat data berindeks genap atau ganjil, masing-masing berbentuk transformasi berukuran m. Inilah dasar algoritma Cooley-Tukey.

Kupu-kupu (butterfly) — Operasi dasar $(E_k, O_k) \mapsto (E_k + O_k,\ E_k - O_k)$ dengan O_k sudah dikalikan faktor putar $e^{ik\pi/m}$. Seluruh FFT tersusun dari operasi ini.

Syarat pangkat dua — Versi dasar membutuhkan $m = 2^p$ agar pemisahan dapat diulang sampai $p + 1$ kali. Ukuran lain memerlukan faktorisasi lain atau tambahan nol.

Orde $O(m \log_2 m)$ — Banyak operasi turun dari orde m^2 menjadi $m \log_2 m$ (sekitar $3m + m \log_2 m$ perkalian kompleks menurut cara hitung buku). Ini mengubah interpolasi trigonometrik dari teori menjadi alat praktis.

Interpolan trigonometrik

$$S_m(x) = \tfrac{a_0}{2} + \tfrac{a_m}{2} \cos mx + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Koefisien kompleks

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}, \qquad k = 0, 1, \ \ldots, 2m-1$$

Pemulihan koefisien

$$a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k, \qquad k = 0, 1, \ \ldots, m$$

Pemisahan genap-ganjil

$$c_k = E_k + O_k, \qquad c_{m+k} = E_k - O_k$$

$$E_k = \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)}$$

$$O_k = e^{ik\pi/m} \sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)}$$

Banyak perkalian kompleks

$$(2m)^2 \longrightarrow 3m + m\log_2 m = O(m\log_2 m)$$

Algoritma: FFT Cooley-Tukey (radix-2, ringkas)

1. Masukkan $2m$ nilai $y_0, \ldots, y_{2m-1}$ di titik $x_j = -\pi + \frac{j\pi}{m}$, dengan $m = 2^p$.
2. Pisahkan data menjadi bagian berindeks genap $y_0, y_2, \ldots$ dan berindeks ganjil $y_1, y_3, \ldots$, masing-masing berisi m nilai.
3. Hitung secara rekursif transformasi berukuran m untuk kedua bagian itu (dengan aturan pemisahan yang sama) sampai ukuran terkecil tercapai; ini memberi E_k dan jumlah ganjil tanpa faktor putar.
4. Kalikan jumlah ganjil dengan faktor putar $e^{ik\pi/m}$ untuk memperoleh O_k, $k = 0, \ldots, m-1$.
5. Gabungkan: $c_k = E_k + O_k$ dan $c_{m+k} = E_k - O_k$ untuk $k = 0, \ldots, m-1$.
6. Hitung $a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k$ untuk $k = 0, \ldots, m$, lalu susun $S_m(x)$ dengan a_0 dan a_m diberi faktor $\frac{1}{2}$ dan $b_0 = b_m = 0$.

Contoh 1: Koefisien langsung untuk empat titik

Misalkan $m = 2$ dan data $y_0, y_1, y_2, y_3 = 2,\ 1,\ -1,\ 3$ di titik $x_j = -\pi,\ -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$. Hitung c_k, koefisien a_k, b_k, dan periksa interpolasinya.

Penyelesaian.

Untuk $m = 2$, $e^{ik\pi j/2} = i^{jk}$. Maka

$$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = 5$$

$$c_1 = y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 = 2 + i + 1 - 3i = 3 - 2i$$

$$c_2 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 = 2 - 1 - 1 - 3 = -3$$

$$c_3 = y_0 - iy_1 - y_2 + iy_3 = 2 - i + 1 + 3i = 3 + 2i$$

Dengan $a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{2} c_k$: $a_0 = 2{,}5$; $a_1 + ib_1 = -\frac{3-2i}{2} = -1{,}5 + i$, jadi $a_1 = -1{,}5$, $b_1 = 1$; $a_2 = \frac{-3}{2} = -1{,}5$. Maka

$$S_2(x) = 1{,}25 - 0{,}75\cos 2x - 1{,}5\cos x + \sin x$$

Pemeriksaan: $S_2(-\pi) = 1{,}25 - 0{,}75 + 1{,}5 = 2$; $S_2(-\frac{\pi}{2}) = 1{,}25 + 0{,}75 - 1 = 1$; $S_2(0) = 1{,}25 - 0{,}75 - 1{,}5 = -1$; $S_2(\frac{\pi}{2}) = 1{,}25 + 0{,}75 + 1 = 3$. Keempatnya sama dengan y_j. Perhatikan pula $c_3 = \overline{c_1}$, sesuai sifat data real.

Contoh 2: Pemisahan genap-ganjil pada data yang sama

Dengan data contoh sebelumnya ($m = 2$), hitung c_0, c_1, c_2, c_3 lewat E_k dan O_k dan bandingkan.

Penyelesaian.

Data genap: $y_0 = 2,\ y_2 = -1$. Data ganjil: $y_1 = 1,\ y_3 = 3$. Untuk $m = 2$, $m/2 = 1$ dan $e^{ik\pi j/(m/2)} = e^{ik\pi j} = (-1)^{kj}$.

Untuk $k = 0$: $E_0 = y_0 + y_2 = 1$ dan $O_0 = e^0(y_1 + y_3) = 4$. Maka $c_0 = E_0 + O_0 = 5$ dan $c_2 = E_0 - O_0 = -3$.

Untuk $k = 1$: $E_1 = y_0 - y_2 = 3$ dan $O_1 = e^{i\pi/2}(y_1 - y_3) = i(-2) = -2i$. Maka $c_1 = E_1 + O_1 = 3 - 2i$ dan $c_3 = E_1 - O_1 = 3 + 2i$.

Hasilnya sama persis dengan perhitungan langsung. Perhatikan bahwa kita hanya memerlukan dua transformasi berukuran 2 (di sini cukup penjumlahan dan pengurangan) ditambah satu perkalian faktor putar $e^{i\pi/2} = i$, bukan empat jumlah berisi empat suku.

Contoh 3: Perbandingan banyak operasi

Sebuah sinyal memiliki $2m = 1024$ titik, jadi $m = 512 = 2^9$. Bandingkan banyak perkalian kompleks cara langsung dan FFT.

Penyelesaian.

Cara langsung: $(2m)^2 = 1024^2 = 1.048.576$ perkalian.

FFT: $3m + m\log_2 m = 3 \cdot 512 + 512 \cdot 9 = 1536 + 4608 = 6144$ perkalian.

Perbandingannya $\frac{1.048.576}{6144} \approx 170{,}7$, jadi FFT sekitar 171 kali lebih sedikit operasi. Bila m digandakan menjadi 1024, angkanya menjadi $4.194.304$ berbanding 13.312 (rasio sekitar 315): keuntungan FFT makin besar bila data makin banyak.

Kesalahan umum

• Lupa faktor $\frac{1}{2}$ pada a_0 dan a_m dalam $S_m(x)$. Tanpa faktor itu interpolan tidak melalui titik data, padahal rumus $a_k = \frac{1}{m}\sum y_j \cos kx_j$ dipakai sama untuk semua k.

• Mengabaikan faktor $(-1)^k$ dalam $a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k$. Faktor ini berasal dari pergeseran titik x_j sebesar $-\pi$; tanpanya koefisien berselang-seling salah tanda.

• Membandingkan hasil langsung dengan fungsi FFT pustaka (mis. NumPy) tanpa menyamakan konvensi: pustaka memakai eksponen $-2\pi ijk/N$ dan simpul mulai dari nol, sehingga ada konjugat dan faktor tanda yang perlu disesuaikan.

• Mengira FFT adalah hampiran baru yang kurang teliti. FFT menghitung bilangan yang sama persis dengan rumus langsung (selain galat pembulatan); yang berubah hanya urutan perhitungannya.

• Menerapkan versi radix-2 pada jumlah data yang bukan pangkat dua tanpa menambah nol atau memakai faktorisasi lain, sehingga pemisahan genap-ganjil macet di tengah rekursi.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa interpolasi trigonometrik di $2m$ titik dan hampiran kuadrat terkecil dengan derajat m menghasilkan polinomial yang praktis sama? Apa bedanya pada suku a_0 dan a_m?
2. Di bagian mana tepatnya penghematan operasi terjadi: pada pemisahan satu kali, atau pada pengulangannya? Jelaskan mengapa pemisahan satu kali saja baru memberi penghematan sekitar setengah.
3. Untuk data real mengapa $c_{2m-k} = \overline{c_k}$? Bagaimana sifat ini dapat dipakai untuk menghemat memori dan perhitungan lagi?
4. Bagaimana memperlakukan data yang banyaknya bukan pangkat dua, dan apa konsekuensi penambahan nol terhadap hampirannya?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $m = 2$ dan data $y_0, y_1, y_2, y_3 = 1, 0, 0, 0$, hitung semua c_k, koefisien a_k, b_k, lalu tulis $S_2(x)$ dan periksa di keempat titik.

Kunci: Semua $c_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, 3$). Maka $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$, sehingga $S_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos x$. Nilainya di $x = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ adalah $1, 0, 0, 0$.

2. Untuk $m = 4$ (8 titik) dan $y_j = j(8 - j)$, $j = 0, \ldots, 7$, tentukan a_k dan b_k. Mengapa semua $b_k = 0$?

Kunci: $y = (0, 7, 12, 15, 16, 15, 12, 7)$ dan $c = (84, -27{,}3137, -8, -4{,}6863, -4, \ldots)$ yang semuanya real. Maka $a_0 = 21$, $a_1 = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}8284$, $a_2 = -2$, $a_3 = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}1716$, $a_4 = -1$. Semua $b_k = 0$ karena $y_j = y_{8-j}$ simetris terhadap $x = 0$ (fungsi genap), sehingga jumlah $\sum y_j \sin kx_j$ saling meniadakan. Pemeriksaan: $S_4(0) = 10{,}5 - 0{,}5 + 6{,}8284 - 2 + 1{,}1716 = 16 = y_4$.

3. Hitung banyak perkalian kompleks cara langsung dan FFT (rumus $3m + m\log_2 m$) untuk $2m = 4096$ titik, lalu rasionya.

Kunci: $m = 2048 = 2^{11}$. Langsung: $4096^2 = 16.777.216$. FFT: $3 \cdot 2048 + 2048 \cdot 11 = 6144 + 22528 = 28.672$. Rasio $\approx 585{,}1$.

4. Buktikan bahwa untuk data real y_j berlaku $c_{2m-k} = \overline{c_k}$.

Kunci: $c_{2m-k} = \sum y_j e^{i(2m-k)\pi j/m} = \sum y_j e^{2\pi ij} e^{-ik\pi j/m}$. Karena j bulat, $e^{2\pi ij} = 1$, sehingga $c_{2m-k} = \sum y_j e^{-ik\pi j/m}$. Untuk y_j real ini sama dengan konjugat $\sum y_j e^{ik\pi j/m} = \overline{c_k}$ (konjugat dari c_k).

Pesan Utama

Ingat

Pilih kriteria galat sesuai tujuan: kuadrat terkecil meminimalkan galat rata-rata, Chebyshev meminimalkan galat terburuk.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan