MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 9

Aproksimasi Nilai Eigen

Approximating Eigenvalues

Halaman buku 561 – 626 • 7 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Bab ini menaksir nilai eigen tanpa menyelesaikan polinom karakteristik. Lingkaran Gershgorin memberi lokasi kasar semua nilai eigen. Metode pangkat menemukan nilai eigen dominan lewat iterasi $A\mathbf{x}$, dan variasinya (inverse power, deflasi) menjangkau nilai eigen lain.

Untuk matriks simetris, transformasi kesamaan ortogonal (Householder) mereduksi matriks ke bentuk tridiagonal, lalu algoritma QR menemukan semua nilai eigen. Dekomposisi nilai singular (SVD) menggeneralisasi gagasan ini ke matriks persegi panjang dan menjadi dasar kompresi data dan kuadrat terkecil yang stabil.

Tujuan Pembelajaran

1. Menggunakan teorema Gershgorin untuk melokalisasi nilai eigen.
2. Menjalankan metode pangkat dan menaksir laju konvergensinya.
3. Menjelaskan reduksi Householder dan iterasi QR.
4. Menyatakan SVD dan hubungannya dengan nilai eigen A^TA.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
9.1	Linear Algebra and Eigenvalues	562	Teo. 9.1 (Geršgorin Circle); Def. 9.2; Teo. 9.3; Def. 9.4; Teo. 9.5; Def. 9.6; Teo. 9.7; Teo. 9.8; 8 contoh
9.2	Orthogonal Matrices and Similarity Transformations	570	Def. 9.9; Teo. 9.10; Def. 9.11; Teo. 9.12; Teo. 9.13; Kor. 9.14; Teo. 9.15 (Schur); Teo. 9.16 ...; 1 contoh
9.3	The Power Method	576	Teo. 9.19; Teo. 9.20; 5 contoh
9.4	Householder's Method	593	Def. 9.21; Teo. 9.22; 1 contoh
9.5	The QR Algorithm	601	Def. 9.23; 3 contoh
9.6	Singular Value Decomposition	614	Def. 9.24; Teo. 9.25; Teo. 9.26; Def. 9.27; 4 contoh
9.7	Survey of Methods and Software	626	–

Rumus dan Metode Kunci

Cakram Gershgorin

$$\lambda \in \bigcup_i \{ z : \ |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}$$

Metode pangkat

$$\mathbf{y}^{(m)} = A\mathbf{x}^{(m-1)}, \quad \mu^{(m)} = y_p^{(m)}, \quad \mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{y}^{(m)} / \mu^{(m)} \ \rightarrow \ \lambda_1$$

Iterasi QR

$$A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$$

SVD

$$A = U \Sigma V^T, \qquad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i (A^T A)}$$

9.1 Linear Algebra and Eigenvalues

Rujukan buku: halaman 562

Pada bab-bab sebelumnya nilai eigen muncul sebagai alat untuk menilai apakah suatu iterasi linear konvergen. Untuk matriks A berukuran $n \times n$, bilangan λ disebut nilai eigen bila ada vektor taknol $\mathbf{x}$ dengan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, dan $\mathbf{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian. Nilai-nilai eigen adalah akar polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

yang berderajat n. Secara teori ini sudah menyelesaikan masalah, tetapi secara numerik jalan itu buruk: menghitung determinan simbolik mahal, dan akar polinomial berderajat tinggi sangat sensitif terhadap galat pada koefisien. Karena itu bab ini mengembangkan metode lain (metode pangkat, transformasi Householder, algoritma QR, dan SVD) yang bekerja langsung pada matriks.

Seksi ini menyiapkan perangkat dasarnya. Pertama, dua matriks A dan B disebut similar bila $B = P^{-1}AP$ untuk suatu matriks taksingular P. Matriks yang similar memiliki polinomial karakteristik yang sama, sehingga nilai eigennya sama; vektor eigen $\mathbf{y}$ milik B berhubungan dengan vektor eigen $P\mathbf{y}$ milik A. Inilah dasar seluruh strategi bab ini: ubah A menjadi matriks yang lebih sederhana (segitiga, tridiagonal, diagonal) lewat serangkaian transformasi similar tanpa mengubah nilai eigennya. Kedua, jari-jari spektral $\rho(A) = \max|\lambda_i|$ adalah ukuran besar nilai eigen terbesar, dan selalu berlaku $\rho(A) \le \|A\|$ untuk setiap norma matriks yang diinduksi norma vektor.

Hasil sentral seksi ini adalah Teorema Lingkaran Geršgorin. Untuk setiap baris i definisikan cakram R_i di bidang kompleks berpusat di a_{ii} dengan jari-jari

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Semua nilai eigen A terletak di dalam gabungan $R = \bigcup_i R_i$. Lebih kuat lagi, bila gabungan k cakram tidak berpotongan dengan $n-k$ cakram lainnya, maka gabungan k cakram itu memuat tepat k nilai eigen (dihitung dengan multiplisitas). Bukti bagian pertama pendek: bila $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dan komponen x_i yang terbesar mutlaknya dipilih, baris ke-i memberi $(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$, sehingga $|\lambda - a_{ii}| \le r_i$. Karena A dan A^{T} memiliki nilai eigen yang sama, teorema juga berlaku dengan cakram yang dibentuk dari jumlah kolom; nilai eigen harus berada di irisan kedua gabungan itu.

Akibat-akibat praktisnya banyak. Bila 0 tidak terletak di gabungan cakram (misalnya A dominan diagonal secara ketat), maka tidak ada nilai eigen nol, sehingga A taksingular. Gabungan cakram juga memberi batas atas $\rho(A) \le \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Untuk metode iterasi $\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$, cukup menunjukkan bahwa semua cakram T berada di dalam cakram satuan untuk menyimpulkan $\rho(T) < 1$ dan konvergensi, tanpa menghitung nilai eigen sama sekali.

Hal lain yang perlu diingat dari aljabar linear: vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen berbeda saling bebas linear, sehingga matriks dengan n nilai eigen berbeda dapat didiagonalkan. Untuk matriks simetrik real, semua nilai eigen real dan vektor eigen dari nilai eigen berbeda saling ortogonal; matriks seperti ini dapat didiagonalkan secara ortogonal. Sifat baik inilah yang membuat kasus simetrik jauh lebih mudah secara numerik, dan banyak metode pada seksi berikutnya dirancang khusus untuknya. Teorema Geršgorin hanya memberi lokasi kasar, bukan nilai yang tepat, sehingga ia dipakai untuk memilih tebakan awal atau menguji kestabilan, sedangkan nilai eigen yang akurat tetap dicari dengan metode numerik berikutnya.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Nilai eigen dan vektor eigen — Pasangan $(\lambda, \mathbf{x})$ dengan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Nilai eigen adalah akar dari $\det(A - \lambda I) = 0$.

Matriks similar — $B = P^{-1}AP$ dengan P taksingular. Polinomial karakteristik dan nilai eigen A dan B sama, sehingga transformasi similar aman dipakai untuk menyederhanakan matriks.

Jari-jari spektral — $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$. Selalu $\rho(A) \leq \|A\|$ untuk norma matriks yang diinduksi norma vektor, dan iterasi linear konvergen bila $\rho(T) < 1$.

Cakram Geršgorin — Cakram berpusat di a_{ii} berjari-jari jumlah mutlak elemen lain di baris ke-i. Gabungannya memuat semua nilai eigen.

Cakram terpisah — Gabungan k cakram yang tidak menyentuh cakram lain memuat tepat k nilai eigen, dihitung dengan multiplisitas.

Kebebasan linear vektor eigen — Vektor eigen dari nilai eigen yang berbeda saling bebas linear; bila n nilai eigen semuanya berbeda, matriks dapat didiagonalkan.

Kasus simetrik real — Nilai eigen semuanya real dan vektor eigen dari nilai eigen berbeda saling ortogonal.

Polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Transformasi similar

$$B = P^{-1}AP \;\Rightarrow\; \det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

Cakram Geršgorin baris ke-i

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} : \; |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Batas jari-jari spektral

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Contoh 1: Cakram Geršgorin untuk matriks simetrik

Untuk A dengan baris $(4, 1, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(0, 1, -2)$, tentukan cakram Geršgorin, perkirakan lokasi nilai eigen, dan bandingkan dengan nilai eigen sebenarnya.

Penyelesaian.

Pusat dan jari-jari: R_1 berpusat di 4 berjari-jari 1, yakni $[3, 5]$; R_2 berpusat di 3 berjari-jari 2, yakni $[1, 5]$; R_3 berpusat di -2 berjari-jari 1, yakni $[-3, -1]$ (matriks simetrik real, jadi nilai eigen real dan cakram cukup dipandang sebagai selang).

R_3 tidak berpotongan dengan $R_1 \cup R_2 = [1, 5]$. Maka tepat satu nilai eigen berada di $[-3, -1]$ dan dua lainnya di $[1, 5]$. Nilai eigen sebenarnya (dihitung dengan kode): $-2{,}1985$, $2{,}5369$, $4{,}6616$, cocok dengan prediksi. Karena $0 \notin R$, matriks ini taksingular.

Contoh 2: Batas jari-jari spektral dan cakram kolom

Untuk B dengan baris $(5, 1, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, -3)$, gunakan cakram baris dan kolom untuk membatasi nilai eigen.

Penyelesaian.

Cakram baris: pusat 5 jari-jari 2; pusat 2 jari-jari 1; pusat -3 jari-jari 1. Jumlah mutlak baris adalah $7, 3, 4$ sehingga $\rho(B) \leq 7$. Jumlah mutlak kolom adalah $6, 3, 5$ sehingga $\rho(B) \leq 6$ (karena B dan B^T senilai eigen sama, batas yang lebih kecil boleh dipakai).

Cakram kolom: pusat 5 jari-jari 1; pusat 2 jari-jari 1; pusat -3 jari-jari 2. Gabungan cakram kolom ada di $[4, 6] \cup [1, 3] \cup [-5, -1]$, sehingga semua nilai eigen real harus berada di sana (irisan dengan gabungan cakram baris). Nilai eigen sebenarnya: $-3{,}0993$, $1{,}9380$, $5{,}1613$; yang terbesar, $5{,}1613$, memang ≤ 6.

Contoh 3: Kekonvergenan iterasi Jacobi lewat Geršgorin

Matriks C berbaris $(4, 1, 1)$, $(1, 5, 2)$, $(0, 1, 3)$. Tunjukkan tanpa menghitung nilai eigen bahwa iterasi Jacobi untuk $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konvergen.

Penyelesaian.

Matriks iterasi Jacobi $T = -D^{-1}(C - D)$ memiliki diagonal nol dan jumlah mutlak baris $\frac{2}{4} = 0{,}5$, $\frac{3}{5} = 0{,}6$, $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333$. Semua cakram Geršgorin T berpusat di 0 dengan jari-jari paling besar $0{,}6 < 1$, jadi $\rho(T) \leq 0{,}6 < 1$ dan iterasi konvergen. Perhitungan langsung memberi $\rho(T) = 0{,}4679$, konsisten dengan batas itu.

Kesalahan umum

• Menganggap tiap cakram Geršgorin memuat tepat satu nilai eigen. Itu hanya benar bila cakram tersebut terpisah dari yang lain; bila cakram tumpang tindih, sebuah cakram bisa kosong dari nilai eigen.

• Mengira nilai eigen A dan $A + E$ berbeda sedikit hanya karena E kecil pada semua kasus; untuk matriks tak normal, perubahan nilai eigen bisa jauh lebih besar daripada $\|E\|$.

• Menghitung nilai eigen sebagai akar polinomial karakteristik untuk matriks besar. Cara ini tidak stabil secara numerik; gunakan metode yang bekerja langsung pada matriks.

• Menyamakan nilai eigen dengan elemen diagonal. Hanya untuk matriks segitiga atau diagonal elemen diagonal merupakan nilai eigen.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa kedua matriks yang similar memiliki nilai eigen sama, tetapi vektor eigennya umumnya berbeda? Bagaimana hubungan keduanya?
2. Bagaimana teorema Geršgorin membuktikan bahwa matriks dominan diagonal secara ketat takterbalikkan, dan apa yang gagal bila dominansinya hanya tidak ketat?
3. Mengapa nilai eigen matriks simetrik real lebih mudah dihitung secara numerik dibanding matriks umum?

4. Kapan batas $\rho(A) \leq \|A\|$ cukup informatif, dan kapan terlalu longgar?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan cakram Geršgorin untuk matriks berbaris $(6, 2, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(0, 2, -5)$, lalu simpulkan berapa nilai eigen yang berada di tiap kelompok cakram terpisah.

Kunci: Cakram: pusat 6 jari-jari 2 ($[4, 8]$); pusat -1 jari-jari 2 ($[-3, 1]$); pusat -5 jari-jari 2 ($[-7, -3]$). Dua cakram terakhir bersinggungan di -3, jadi bergabung menjadi $[-7, 1]$. Cakram pertama $[4, 8]$ terpisah dari $[-7, 1]$: tepat satu nilai eigen di $[4, 8]$ dan dua di $[-7, 1]$.

2. Tunjukkan bahwa matriks berbaris $(3, 1)$ dan $(2, 4)$ takterbalikkan memakai teorema Geršgorin.

Kunci: Cakram baris: pusat 3 jari-jari 1 ($[2, 4]$) dan pusat 4 jari-jari 2 ($[2, 6]$). Gabungan $[2, 6]$ tidak memuat 0, sehingga 0 bukan nilai eigen dan matriks takterbalikkan (determinannya 10).

3. Matriks A berbaris $(3, 1)$ dan $(2, 2)$, dan P berbaris $(1, 1)$ dan $(1, 2)$. Hitung $P^{-1}AP$ dan periksa bahwa nilai eigennya sama dengan A.

Kunci: Dengan P^{-1} berbaris $(2, -1)$ dan $(-1, 1)$, hasil $P^{-1}AP$ berbaris $(4, 4)$ dan $(0, 1)$ (segitiga atas). Jejak 5 dan determinan 4 sama dengan A, sehingga nilai eigennya 1 dan 4.

Web by: Steven Paulus Siahaan

9.2 Orthogonal Matrices and Similarity Transformations

Rujukan buku: halaman 570

Seksi ini mengumpulkan alat aljabar linear yang menjadi tulang punggung metode-metode nilai eigen modern: keortogonalan, matriks ortogonal, dan transformasi similar. Dua vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut ortogonal bila $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, dan himpunan vektor taknol yang saling ortogonal otomatis bebas linear. Bila setiap vektor juga berpanjang satu (norma-2 sama dengan 1), himpunan itu disebut ortonormal. Proses Gram-Schmidt mengubah himpunan vektor bebas linear $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ menjadi himpunan ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ yang merentang ruang yang sama: kurangkan dari tiap vektor semua proyeksinya pada vektor-vektor yang sudah dibuat, lalu normalkan sisanya.

Matriks Q berukuran $n \times n$ disebut ortogonal bila kolom-kolomnya ortonormal, yang setara dengan

$$Q^TQ = I \quad \text{atau} \quad Q^{-1} = Q^T$$

Sifat-sifatnya sangat menguntungkan secara numerik. Perkalian dua matriks ortogonal tetap ortogonal. Q mempertahankan panjang dan sudut: $\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ untuk setiap $\mathbf{x}$, dan $\det Q = \pm 1$. Akibatnya bilangan kondisi $\|Q\|_2\|Q^{-1}\|_2$ sama dengan 1, sehingga mengalikan dengan matriks ortogonal tidak memperbesar galat pembulatan. Itulah alasan algoritma yang dibangun dari transformasi ortogonal (rotasi dan refleksi) stabil dan dipilih untuk hampir semua perhitungan nilai eigen.

Ide utamanya: bila Q ortogonal, maka $B = Q^{-1}AQ = Q^TAQ$ adalah transformasi similar yang sangat murah (tanpa menghitung invers) dan stabil. Dua teorema menjelaskan apa yang bisa dicapai. Teorema Schur menyatakan bahwa setiap matriks persegi A similar dengan matriks segitiga atas lewat matriks uniter U (versi kompleks dari matriks ortogonal), sehingga nilai eigen A muncul di diagonal matriks segitiga tersebut. Bila A simetrik real, matriks segitiga itu simetrik sekaligus segitiga, jadi diagonal: A dapat didiagonalkan secara ortogonal, $Q^TAQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, kolom-kolom Q adalah vektor eigen ortonormal, dan semua nilai eigen real. Kebalikannya juga berlaku: matriks yang dapat didiagonalkan secara ortogonal pasti simetrik.

Contoh paling sederhana adalah matriks rotasi bidang $R(\theta)$, yang memutar vektor sebesar sudut θ. Untuk A simetrik berukuran 2×2 dengan elemen a, b, c (baris pertama a, b dan baris kedua b, c), rotasi dengan $\tan 2\theta = \frac{2b}{a-c}$ menghilangkan elemen di luar diagonal sehingga R^TAR menjadi diagonal. Gagasan memutar pasangan koordinat untuk menghilangkan satu elemen inilah dasar metode Jacobi dan rotasi Givens. Refleksi Householder $P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dengan $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ adalah jenis matriks ortogonal lain (simetrik dan $P^2 = I$), dipakai pada seksi 9.4 untuk menghilangkan banyak elemen sekaligus.

Pada praktiknya kita tidak mencari Q yang langsung mendiagonalkan A, karena itu setara dengan menyelesaikan masalah nilai eigen itu sendiri. Strategi bab ini adalah menyusun urutan transformasi ortogonal $A \to Q_1^TAQ_1 \to Q_2^TQ_1^TAQ_1Q_2 \to \cdots$ yang secara bertahap membawa matriks mendekati bentuk segitiga atau diagonal, dengan nilai eigen tetap terjaga. Seksi-seksi berikutnya mewujudkan strategi ini: metode Householder (menuju bentuk tridiagonal) dan algoritma QR (menuju bentuk segitiga atau diagonal).

Konsep kunci

Vektor ortogonal dan ortonormal — Ortogonal bila $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$; ortonormal bila selain itu panjang tiap vektor adalah 1. Himpunan vektor taknol yang saling ortogonal bebas linear.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Proses Gram-Schmidt — Membuat basis ortonormal dari vektor bebas linear dengan mengurangkan proyeksi pada vektor-vektor sebelumnya lalu menormalkan.

Matriks ortogonal — $Q^TQ = I$, sehingga $Q^{-1} = Q^T$. Mempertahankan norma-2, $\det Q = \pm 1$, dan bilangan kondisinya 1.

Transformasi similar ortogonal — $B = Q^TAQ$ mempertahankan nilai eigen dan dihitung tanpa invers; stabil karena Q tidak memperbesar galat.

Teorema Schur — Setiap matriks persegi similar secara uniter dengan matriks segitiga atas yang diagonalnya adalah nilai eigen.

Diagonalisasi ortogonal — Matriks real A simetrik jika dan hanya jika Q^TAQ diagonal untuk suatu Q ortogonal; nilai eigennya real dan vektor eigennya ortonormal.

Rotasi dan refleksi — Dua keluarga matriks ortogonal dasar: rotasi bidang (Givens) dan refleksi $P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ (Householder).

Matriks ortogonal

$$Q^TQ = I, \qquad \|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$$

Proyeksi Gram-Schmidt

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_j)\,\mathbf{u}_j, \qquad \mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{z}_k}{\|\mathbf{z}_k\|_2}$$

Diagonalisasi matriks simetrik

$$Q^TAQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ \dots, \lambda_n)$$

Rotasi pada matriks simetrik $2 imes 2$

$$\tan 2\theta = \frac{2b}{a-c}$$

Refleksi Householder

$$P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \quad \|\mathbf{w}\|_2 = 1, \quad P^T = P = P^{-1}$$

Algoritma: Gram-Schmidt

1. Masukkan vektor bebas linear $\mathbf{v}_1, \ \dots, \mathbf{v}_k$.
2. Set $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|_2$.
3. Untuk $j = 2, \ \dots, k$: hitung $\mathbf{z}_j = \mathbf{v}_j - \sum_{i<j} (\mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$.
4. Normalkan: $\mathbf{u}_j = \mathbf{z}_j / \|\mathbf{z}_j\|_2$. Bila $\mathbf{z}_j = \mathbf{0}$, vektor-vektor itu bergantung linear dan proses gagal.
5. Keluaran: $\mathbf{u}_1, \ \dots, \mathbf{u}_k$ ortonormal dan merentang ruang yang sama dengan masukan.

Contoh 1: Memeriksa matriks ortogonal

Tunjukkan bahwa Q dengan baris $\frac{1}{3}(1,2,2)$, $\frac{1}{3}(2,1,-2)$, $\frac{1}{3}(2,-2,1)$ ortogonal, lalu hitung $\|Q\mathbf{x}\|_2$ untuk $\mathbf{x}=(1,2,2)^T$.

Penyelesaian.

Setiap baris berpanjang $\frac{1}{3}\sqrt{1+4+4}=1$. Hasil kali titik baris 1 dan 2 adalah $\frac{1}{9}(2+2-4)=0$; baris 1 dan 3: $\frac{1}{9}(2-4+2)=0$; baris 2 dan 3: $\frac{1}{9}(4-2-2)=0$. Jadi baris-barisnya ortonormal, dan $QQ^T=I$ (dikonfirmasi dengan kode), yang berarti Q ortogonal.

Untuk $\mathbf{x}=(1,2,2)^T$ diperoleh $Q\mathbf{x}=(3,0,0)^T$ dan $\|Q\mathbf{x}\|_2=3=\|\mathbf{x}\|_2$, sesuai sifat pengawetan norma.

Contoh 2: Diagonalisasi dengan satu rotasi

Diagonalkan A dengan baris $(5,2)$ dan $(2,2)$ memakai rotasi $R(\theta)$ dengan baris $(\cos\theta,-\sin\theta)$ dan $(\sin\theta,\cos\theta)$.

Penyelesaian.

Di sini $a=5$, $b=2$, $c=2$, sehingga $\tan 2\theta=\frac{2b}{a-c}=\frac{4}{3}$, jadi $2\theta=0{,}9273$ rad dan $\theta=0{,}4636$ rad ($26{,}57$ derajat). Maka $\cos\theta=0{,}8944$ dan $\sin\theta=0{,}4472$ (tepatnya $\frac{2}{\sqrt{5}}$ dan $\frac{1}{\sqrt{5}}$).

Menghitung R^TAR memberikan matriks diagonal dengan elemen 6 dan 1 (dan elemen luar diagonal nol sampai ketelitian mesin). Nilai eigen A adalah 6 dan 1, sesuai: jejak $5+2=7=6+1$ dan determinan $10-4=6=6\cdot 1$.

Contoh 3: Gram-Schmidt pada tiga vektor

Ortonormalkan $\mathbf{v}_1=(1,1,0)^T$, $\mathbf{v}_2=(1,0,1)^T$, $\mathbf{v}_3=(0,1,1)^T$.

Penyelesaian.

Langkah 1: $\|\mathbf{v}_1\|_2=\sqrt{2}$, jadi $\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T=(0{,}70711,0{,}70711,0)^T$.

Langkah 2: $\mathbf{v}_2^T\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, maka $\mathbf{z}_2=\mathbf{v}_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1=(0{,}5,-0{,}5,1)^T$ dengan norma $1{,}2247$, sehingga $\mathbf{u}_2=(0{,}40825,-0{,}40825,0{,}81650)^T$.

Langkah 3: $\mathbf{v}_3^T\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $\mathbf{v}_3^T\mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}$. Dengan mengurangkan kedua proyeksi didapat $\mathbf{z}_3=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T$ dengan norma $1{,}1547$, jadi $\mathbf{u}_3=(-0{,}57735,0{,}57735,0{,}57735)^T$.

Ketiga hasil kali titik $\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j$ $(i\neq j)$ bernilai nol (diperiksa dengan kode), sehingga basisnya ortonormal.

Kesalahan umum

• Mengira matriks dengan kolom-kolom yang hanya ortogonal (tidak berpanjang satu) sudah ortogonal. Matriks ortogonal membutuhkan kolom ortonormal; bila hanya ortogonal maka Q^TQ diagonal, bukan I.

• Menganggap setiap matriks real dapat didiagonalkan secara ortogonal. Itu hanya benar untuk matriks simetrik; matriks umum paling jauh dibawa ke bentuk segitiga (Schur) atau bahkan bukan real.

• Menghitung vektor ortonormal dengan Gram-Schmidt klasik pada vektor yang hampir bergantung linear tanpa waspada: kehilangan keortogonalan akibat galat pembulatan bisa besar.

• Mencampur arah rotasi: R^TAR dan RAR^T berbeda. Pastikan sudut θ dan urutan transposenya konsisten.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa bilangan kondisi 1 dari matriks ortogonal membuat transformasi similar ortogonal lebih aman dibanding transformasi similar umum?
2. Mengapa matriks simetrik real selalu memiliki nilai eigen real? Petunjuk: pikirkan $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$ untuk vektor eigen kompleks.
3. Apa arti geometris refleksi Householder, dan mengapa $P^2 = I$?
4. Mengapa kita tidak langsung mencari Q yang mendiagonalkan A, melainkan menyusunnya sebagai deretan transformasi sederhana?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Apakah matriks dengan baris $(0{,}6;\ 0{,}8)$ dan $(-0{,}8;\ 0{,}6)$ ortogonal? Bila ya, berapa sudut rotasinya?

Kunci: Ya: baris-barisnya berpanjang $\sqrt{0{,}36+0{,}64}=1$ dan hasil kali titiknya $-0{,}48+0{,}48=0$. Ini rotasi dengan $\cos\theta = 0{,}6$, $\sin\theta = -0{,}8$, yaitu $\theta \approx -0{,}9273$ rad ($-53{,}13^\circ$).

2. Tentukan rotasi yang mendiagonalkan A dengan baris $(1, 3)$ dan $(3, 1)$, serta nilai eigennya.

Kunci: $a = c$ sehingga $\tan 2\theta$ tak terhingga, $2\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Nilai eigennya $1+3=4$ dan $1-3=-2$, dengan vektor eigen $(1, 1)/\sqrt{2}$ dan $(1, -1)/\sqrt{2}$.

3. Buktikan bahwa jika Q ortogonal maka $\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$.

Kunci: $\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TQ^TQ\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2$.

9.3 The Power Method

Rujukan buku: halaman 576

Metode pangkat (power method) adalah teknik iteratif untuk menghampiri nilai eigen dominan, yaitu nilai eigen dengan nilai mutlak terbesar, beserta vektor eigennya. Metode ini cocok untuk matriks besar dan jarang (sparse) karena hanya membutuhkan perkalian matriks dengan vektor, tanpa mengubah matriks. Asumsinya: A berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen yang memenuhi $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ dan memiliki n vektor eigen yang bebas linear $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Intuisinya sederhana. Ambil vektor awal $\mathbf{x}^{(0)} = \sum_j \beta_j \mathbf{v}_j$ dengan $\beta_1 \neq 0$. Setelah m kali perkalian,

$$A^m \mathbf{x}^{(0)} = \lambda_1^m \left[\beta_1 \mathbf{v}_1 + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{v}_j \right]$$

Karena $|\lambda_j / \lambda_1| < 1$, semua suku selain yang pertama menyusut, sehingga $A^m \mathbf{x}^{(0)}$ makin searah dengan $\mathbf{v}_1$. Agar angka tidak meledak atau lenyap, vektor dinormalkan di tiap langkah: pada versi dasar, pilih komponen x_p dengan nilai mutlak terbesar, lalu $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^{(k-1)}$, $\mu^{(k)} = y_p$, dan $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y} / \mu^{(k)}$. Barisan $\mu^{(k)}$ menuju λ_1 dan $\mathbf{x}^{(k)}$ menuju vektor eigen yang komponen terbesarnya 1. Galatnya berkurang secara linear dengan rasio $|\lambda_2 / \lambda_1|$, jadi makin dekat $|\lambda_2|$ ke $|\lambda_1|$, makin lambat konvergensinya.

Ada beberapa perbaikan penting. Pertama, bila A simetrik, vektor dinormalkan dalam norma-2 dan taksiran nilai eigen diambil dari hasil bagi Rayleigh $\mu^{(k)} = \frac{(\mathbf{x}^{(k-1)})^T A \mathbf{x}^{(k-1)}}{(\mathbf{x}^{(k-1)})^T \mathbf{x}^{(k-1)}}$; galatnya menyusut dengan rasio $|\lambda_2 / \lambda_1|^2$ per langkah, dua kali lebih cepat. Kedua, percepatan Aitken Δ^2 mengubah barisan konvergen linear $\{\mu^{(k)}\}$ menjadi barisan baru

$$\hat{\mu}^{(k)} = \mu^{(k)} - \frac{(\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)})^2}{\mu^{(k+2)} - 2\mu^{(k+1)} + \mu^{(k)}}$$

yang biasanya konvergen jauh lebih cepat. Ketiga, metode pangkat invers: bila q adalah tebakan dekat suatu nilai eigen λ, matriks $(A - qI)^{-1}$ memiliki nilai eigen $\frac{1}{\lambda_i - q}$ yang terbesar justru milik λ terdekat dengan q. Menerapkan metode pangkat pada $(A - qI)^{-1}$ (dengan menyelesaikan sistem linear $(A - qI)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ di tiap langkah, bukan menghitung invers) menemukan nilai eigen mana pun yang kita incar, dengan $\lambda \approx q + \frac{1}{\mu}$. Karena q dapat diperbarui memakai hasil bagi Rayleigh, konvergensinya bisa menjadi sangat cepat.

Untuk nilai eigen lainnya setelah λ_1 ditemukan, ada teknik deflasi, misalnya deflasi Wielandt, yang membentuk matriks baru yang memiliki nilai eigen sama dengan A kecuali λ_1 digantikan nol. Namun galat dari nilai eigen yang tidak akurat menumpuk di setiap deflasi, sehingga untuk banyak nilai eigen sekaligus metode Householder dan QR (seksi 9.4 dan 9.5) lebih dianjurkan.

Kelebihan metode pangkat adalah kesederhanaannya dan kebutuhan memori kecil. Kekurangannya: konvergen lambat bila $|\lambda_2| \approx |\lambda_1|$, gagal bila $\beta_1 = 0$ secara eksak (walau galat pembulatan biasanya menolong), dan tidak bekerja bila ada dua nilai eigen dominan berbeda tanda dengan modulus sama, misalnya λ dan $-\lambda$.

Konsep kunci

Nilai eigen dominan — Nilai eigen λ_1 dengan $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ untuk semua $j \neq 1$. Metode pangkat hanya menjamin konvergensi menuju nilai eigen ini.

Normalisasi tiap langkah — Vektor dibagi dengan komponen terbesar (atau normanya) agar tidak meluap atau mengecil menjadi nol; komponen terbesar itu menjadi taksiran nilai eigen.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Rasio konvergensi — Galat berkurang kira-kira $|\lambda_2/\lambda_1|$ per iterasi; makin dekat modulus kedua nilai eigen, makin lambat.

Hasil bagi Rayleigh — Untuk A simetrik, $\frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ menaksir nilai eigen dengan galat sebanding kuadrat galat vektor, sehingga rasio konvergensinya menjadi $|\lambda_2/\lambda_1|^2$.

Percepatan Aitken Δ^2 — Transformasi barisan linear konvergen agar konvergen lebih cepat tanpa iterasi tambahan yang berarti.

Metode pangkat invers — Metode pangkat pada $(A-qI)^{-1}$ menemukan nilai eigen terdekat ke q lewat $\lambda \approx q + \frac{1}{\mu}$.

Deflasi — Membentuk matriks yang nilai eigennya sama dengan A kecuali λ_1 dihapus, supaya nilai eigen berikutnya dapat dicari; galatnya menumpuk.

Iterasi metode pangkat

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}^{(k-1)}, \quad \mu^{(k)} = y_p, \quad \mathbf{x}^{(k)} = \frac{\mathbf{y}}{\mu^{(k)}}$$

Laju konvergensi

$$\left|\mu^{(k)} - \lambda_1\right| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

Hasil bagi Rayleigh

$$\mu^{(k)} = \frac{(\mathbf{x}^{(k-1)})^T A\,\mathbf{x}^{(k-1)}}{(\mathbf{x}^{(k-1)})^T\mathbf{x}^{(k-1)}}$$

Percepatan Aitken

$$\hat{\mu}^{(k)} = \mu^{(k)} - \frac{\left(\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}\right)^2}{\mu^{(k+2)} - 2\mu^{(k+1)} + \mu^{(k)}}$$

Metode pangkat invers

$$(A - qI)\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(k-1)}, \qquad \lambda \approx q + \frac{1}{\mu^{(k)}}$$

Algoritma: Metode pangkat

1. Masukkan A, vektor awal $\mathbf{x}^{(0)} \neq \mathbf{0}$, toleransi ε, dan iterasi maksimum N. Skalakan $\mathbf{x}^{(0)}$ sehingga $\|\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = 1$.
2. Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$: hitung $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^{(k-1)}$.
3. Pilih indeks p terkecil dengan $|y_p| = \|\mathbf{y}\|_\infty$ dan set $\mu^{(k)} = y_p$.
4. Bila $y_p = 0$, A memiliki nilai eigen 0 dengan vektor eigen $\mathbf{x}^{(k-1)}$ (atau tebakan awal buruk): berhenti atau pilih $\mathbf{x}^{(0)}$ lain.
5. Hitung $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}/y_p$ dan galat $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$.
6. Bila galat $< \varepsilon$, keluarkan $\mu^{(k)}$ dan $\mathbf{x}^{(k)}$; bila tidak, ulangi sampai N tercapai.

Contoh 1: Metode pangkat pada matriks tridiagonal

Terapkan metode pangkat pada A dengan baris $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(0, 1, 4)$ dan $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Nilai eigen sebenarnya $3 \pm \sqrt{3}$ dan 3.

Penyelesaian.

Normalisasi dengan komponen bernilai mutlak terbesar. Enam iterasi pertama:

$k=1$: $\mu^{(k)}=5{,}0000$, $\mathbf{x}^{(k)}=(0{,}6000,\ 1{,}0000,\ 1)^T$.

$k=2$: $\mu^{(k)}=5{,}0000$, $\mathbf{x}^{(k)}=(0{,}4400,\ 0{,}9200,\ 1)^T$.

$k=3$: $\mu^{(k)}=4{,}9200$, $\mathbf{x}^{(k)}=(0{,}3659,\ 0{,}8537,\ 1)^T$.

$k=4$: $\mu^{(k)}=4{,}8537$, $\mathbf{x}^{(k)}=(0{,}3266,\ 0{,}8090,\ 1)^T$.

$k=5$: $\mu^{(k)}=4{,}8090$, $\mathbf{x}^{(k)}=(0{,}3041,\ 0{,}7806,\ 1)^T$.

$k=6$: $\mu^{(k)}=4{,}7806$, $\mathbf{x}^{(k)}=(0{,}2905,\ 0{,}7626,\ 1)^T$.

Sekarang $\mu^{(8)}=4{,}7513$ (dibanding $\lambda_1=3+\sqrt{3}=4{,}7321$). Rasio konvergensi $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}=\frac{3}{4{,}7321}=0{,}634$, sehingga konvergensinya lambat: galat tersisa $0{,}019$ setelah delapan iterasi.

Contoh 2: Percepatan Aitken

Dari barisan $\mu^{(5)},\mu^{(6)},\mu^{(7)}$ pada contoh sebelumnya, hitung hasil percepatan Aitken.

Penyelesaian.

Nilai-nilainya $\mu^{(5)}=4{,}8090$, $\mu^{(6)}=4{,}7806$, $\mu^{(7)}=4{,}7626$. Maka

$$\hat{\mu}^{(5)}=\mu^{(5)}-\frac{(\mu^{(6)}-\mu^{(5)})^2}{\mu^{(7)}-2\mu^{(6)}+\mu^{(5)}}=4{,}7321$$

Galatnya terhadap $\lambda_1=4{,}7321$ hanya sekitar $0{,}0000$, jauh lebih baik daripada $\mu^{(7)}$ yang galatnya $0{,}0306$, tanpa iterasi tambahan.

Contoh 3: Hasil bagi Rayleigh dan metode pangkat invers

Untuk matriks yang sama (simetrik), (a) hitung taksiran Rayleigh dengan $\mathbf{x}^{(0)}=(1,1,1)^T/\sqrt{3}$ selama lima iterasi; (b) cari nilai eigen terdekat ke $q=1$ dengan metode pangkat invers.

Penyelesaian.

(a) Taksiran Rayleigh berturut-turut $4{,}3333$, $4{,}6271$, $4{,}6941$, $4{,}7170$, $4{,}7260$ menuju $4{,}7321$. Galat setelah lima langkah $0{,}006$, lebih baik dari metode dasar pada iterasi kelima ($0{,}077$), sesuai rasio kuadrat $0{,}402$ versus $0{,}634$.

(b) Pada $(A-I)^{-1}$ dengan vektor awal $(1,1,1)^T$, setelah enam iterasi $\mu^{(6)}=3{,}7319$ sehingga $\lambda\approx 1+\frac{1}{\mu^{(6)}}=1{,}2680$, nilai eigen terkecil sebenarnya $3-\sqrt{3}=1{,}2679$. Konvergensinya dikendalikan oleh rasio nilai eigen $(A-I)^{-1}$ terbesar kedua terhadap yang terbesar, yaitu $\frac{1/2}{1/0{,}268}=\frac{0{,}5}{3{,}732}=0{,}134$, jauh lebih kecil dari $0{,}634$, sehingga lebih cepat.

Kesalahan umum

• Memakai metode pangkat ketika dua nilai eigen memiliki modulus sama (mis. λ dan $-\lambda$): iterasi berosilasi dan tidak konvergen ke satu vektor.

• Memilih vektor awal yang ortogonal terhadap vektor eigen dominan. Secara eksak ini membuat $\beta_1 = 0$; dalam praktik galat pembulatan biasanya memulihkan, tetapi konvergensi tertunda.

• Lupa menormalkan sehingga angka meluap atau lenyap; atau memakai skala yang berubah-ubah tanpa mencatat pembagi sebagai taksiran nilai eigen.

• Menghitung $(A - qI)^{-1}$ secara eksplisit pada metode pangkat invers. Lebih baik menyelesaikan sistem linear $(A - qI)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ dengan faktorisasi yang dipakai ulang.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa metode pangkat hanya butuh perkalian matriks-vektor, dan mengapa ini menguntungkan untuk matriks jarang berukuran besar?
2. Jelaskan mengapa hasil bagi Rayleigh untuk matriks simetrik menggandakan laju konvergensi galat nilai eigen.
3. Pada metode pangkat invers, mengapa memilih q sangat dekat dengan nilai eigen mempercepat konvergensi tetapi membuat $A - qI$ hampir singular? Apakah itu masalah?
4. Apa yang terjadi pada metode pangkat bila A tidak dapat didiagonalkan?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk A dengan baris $(2, 1)$ dan $(1, 2)$ dan $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0)^T$, hitung dua iterasi metode pangkat dengan normalisasi komponen terbesar.

Kunci: $\mathbf{y} = (2, 1)$, $\mu^{(1)} = 2$, $\mathbf{x}^{(1)} = (1; 0{,}5)$. Lalu $\mathbf{y} = (2{,}5;\ 2)$, $\mu^{(2)} = 2{,}5$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1; 0{,}8)$. Nilai eigen dominan sebenarnya 3 (vektor $(1, 1)$).

2. Berapa rasio konvergensi metode pangkat untuk matriks dengan nilai eigen 10, -8, 1 ? Perkirakan banyak iterasi untuk mengecilkan galat faktor 10^{-6}.

Kunci: Rasio $0{,}8$. Perlu $0{,}8^k < 10^{-6}$, yaitu $k > \frac{6}{-\log_{10} 0{,}8} = \frac{6}{0{,}09691} \approx 61{,}9$, jadi sekitar 62 iterasi.

3. Matriks A memiliki nilai eigen 4, 3, -1. Berapa nilai eigen $(A - 2{,}9I)^{-1}$ dan nilai eigen mana yang ditemukan metode pangkat pada matriks itu?

Kunci: Nilai eigen $\frac{1}{4 - 2{,}9} = 0{,}909$, $\frac{1}{3 - 2{,}9} = 10$, dan $\frac{1}{-1 - 2{,}9} = -0{,}256$. Yang dominan adalah 10, sehingga metode menemukan $\lambda = 2{,}9 + \frac{1}{10} = 3$.

Paulus Siahaan

9.4 Householder's Method

Rujukan buku: halaman 593

Metode Householder mengubah matriks simetrik real A menjadi matriks tridiagonal yang similar dengannya, memakai deretan $n-2$ refleksi ortogonal. Mengapa tridiagonal? Matriks tridiagonal hanya memiliki elemen pada diagonal utama dan dua diagonal di sebelahnya, sehingga nilai eigennya jauh lebih murah dicari (dengan algoritma QR pada seksi 9.5 satu iterasi hanya butuh $O(n)$ operasi, dibanding $O(n^3)$ untuk matriks penuh). Karena transformasinya ortogonal dan similar, nilai eigen tidak berubah dan galat pembulatan tidak membesar.

Bangunan dasarnya adalah matriks Householder $P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dengan $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ berpanjang $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$. Matriks ini simetrik, ortogonal, dan $P^2 = I$; secara geometris ia mencerminkan vektor terhadap bidang yang tegak lurus $\mathbf{w}$. Kunci kegunaannya: untuk sembarang vektor $\mathbf{x}$ kita dapat memilih $\mathbf{w}$ sehingga $P\mathbf{x}$ berbentuk $\alpha\mathbf{e}_1$, yaitu semua komponen selain yang pertama dibuat nol, dengan $\alpha = \pm\|\mathbf{x}\|_2$ karena norma terjaga. Pilihan yang stabil adalah $\mathbf{w} \propto \mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1$ dengan tanda α berlawanan dari x_1, supaya tidak terjadi pengurangan dua bilangan yang hampir sama.

Pada langkah ke-k ($k = 1, \ldots, n-2$), kita ingin menolkan elemen $a_{k+2,k}, \ldots, a_{n,k}$ di kolom k (dan secara simetris di baris k) sambil tidak merusak nol yang sudah dibuat di kolom sebelumnya. Untuk itu $\mathbf{w}^{(k)}$ dipilih dengan k komponen pertamanya nol. Misalkan

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{k+1,k})\sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} a_{jk}^2}, \qquad r = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha\, a_{k+1,k}}{2}}$$

Maka $w_1 = \cdots = w_k = 0$, $w_{k+1} = \frac{a_{k+1,k} - \alpha}{2r}$, dan $w_j = \frac{a_{jk}}{2r}$ untuk $j = k+2, \ldots, n$. Matriks baru $A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)}$ memiliki elemen $a_{k+1,k} = \alpha$ dan nol di bawahnya pada kolom k. Setelah $n-2$ langkah diperoleh $A^{(n-1)}$ tridiagonal dan simetrik, sehingga nilai eigen A sama dengan nilai eigen matriks tridiagonal itu.

Kalau A tidak simetrik, prosedur yang sama (dengan transformasi PAP) menghasilkan bentuk Hessenberg atas, yaitu semua elemen di bawah subdiagonal pertama bernilai nol. Bentuk ini tidak sesederhana tridiagonal, tetapi tetap sangat menguntungkan sebagai tahap awal sebelum algoritma QR. Jumlah operasi untuk reduksi penuh sebanding $\frac{2}{3}n^3$ (untuk kasus simetrik, dengan memanfaatkan simetri), dan hanya dilakukan satu kali; sesudah itu iterasi nilai eigen jauh lebih murah.

Perlu diperhatikan bahwa Householder tidak menghitung nilai eigen itu sendiri, melainkan menyiapkan matriksnya. Kelebihannya adalah stabilitas numerik yang sangat baik dan kecepatannya dibanding rotasi Givens untuk matriks penuh (Givens menolkan satu elemen per rotasi, Householder satu kolom sekaligus). Pada praktiknya matriks $P^{(k)}$ tidak pernah dibentuk eksplisit; PAP dihitung lewat perkalian dengan vektor $\mathbf{w}$, yang menghemat operasi dan memori.

Konsep kunci

Matriks Householder — $P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dengan $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$: simetrik, ortogonal, dan $P^2 = I$. Merupakan refleksi terhadap bidang tegak lurus $\mathbf{w}$.

Penolan satu kolom — Untuk vektor $\mathbf{x}$ ada $\mathbf{w}$ sehingga $P\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1$ dengan $|\alpha| = \|\mathbf{x}\|_2$; semua komponen lain menjadi nol sekaligus.

Pilihan tanda α — Tanda α dipilih berlawanan dengan komponen pertama (di sini $a_{k+1,k}$) agar $a_{k+1,k} - \alpha$ tidak mengalami pengurangan bilangan hampir sama.

Bentuk tridiagonal — Elemen taknol hanya pada diagonal dan dua diagonal tetangganya. Tercapai dengan $n-2$ refleksi untuk matriks simetrik.

Bentuk Hessenberg atas — Untuk matriks tak simetrik, reduksi serupa menghasilkan nol di bawah subdiagonal pertama; menjadi bentuk awal bagi algoritma QR.

Kesamaan nilai eigen — Karena $A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)}$ similar dengan $A^{(k)}$, nilai eigen tidak berubah di semua langkah.

Biaya komputasi — Sekitar $\frac{2}{3}n^3$ operasi untuk reduksi simetrik; dilakukan sekali, lalu iterasi pada matriks tridiagonal murah.

Matriks Householder

$$P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad \|\mathbf{w}\|_2 = 1$$

Skalar α dan r pada langkah k

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{k+1,\,k}) \sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} a_{jk}^2}, \qquad r = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha\, a_{k+1,\,k}}{2}}$$

Vektor $\mathbf{w}^{(k)}$

$$w_1 = \cdots = w_k = 0, \qquad w_{k+1} = \frac{a_{k+1,\,k} - \alpha}{2r}, \qquad w_j = \frac{a_{jk}}{2r} \;\; (j > k+1)$$

Transformasi similar

$$A^{(k+1)} = P^{(k)} A^{(k)} P^{(k)}, \qquad k = 1,\, \ldots, n-2$$

Algoritma: Reduksi tridiagonal Householder (matriks simetrik)

1. Masukkan A simetrik berukuran $n \times n$ dan set $A^{(1)} = A$.
2. Untuk $k = 1,\, \ldots, n-2$: hitung $q = \sum_{j=k+1}^{n} (a_{jk}^{(k)})^2$ dan $\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{k+1,\,k}^{(k)}) \sqrt{q}$.
3. Hitung $r = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha a_{k+1,\,k}^{(k)})/2}$ (bila $r = 0$ kolom sudah berbentuk yang diinginkan; lewati langkah ini).
4. Bentuk $\mathbf{w}$: $w_1 = \cdots = w_k = 0$, $w_{k+1} = (a_{k+1,\,k}^{(k)} - \alpha)/(2r)$, $w_j = a_{jk}^{(k)}/(2r)$ untuk $j = k+2,\, \ldots, n$.
5. Hitung $A^{(k+1)} = (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T) A^{(k)} (I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T)$ (tanpa membentuk P eksplisit).
6. Keluaran: $A^{(n-1)}$ tridiagonal dan simetrik, yang nilai eigennya sama dengan A.

Contoh 1: Refleksi yang menolkan komponen

Cari matriks Householder P yang memetakan $\mathbf{x} = (2, 2, 1)^T$ ke kelipatan $\mathbf{e}_1$.

Penyelesaian.

Norma $\|\mathbf{x}\|_2 = 3$. Pilih $\mathbf{v} = \mathbf{x} + 3\mathbf{e}_1 = (5, 2, 1)^T$ (dengan tanda plus ini, $P\mathbf{x}$ menjadi $-3\mathbf{e}_1$), dengan $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 30$. Maka $P = I - \frac{2}{30}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$ dan

$$P\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{2\,\mathbf{v}^T\mathbf{x}}{30}\,\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{v} = (-3, 0, 0)^T$$

karena $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 15$. Normanya tetap 3, sebagaimana seharusnya.

Contoh 2: Satu langkah Householder pada matriks 3×3

Reduksi A dengan baris $(4, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ menjadi tridiagonal.

Penyelesaian.

Hanya satu langkah ($n - 2 = 1$). Kolom pertama di bawah diagonal: $(1, 2)^T$, sehingga $q = 1 + 4 = 5$ dan $\alpha = -\sqrt{5} = -2{,}2361$ (tanda minus karena $a_{21} = 1 > 0$). Lalu $r = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha a_{21}}{2}} = 1{,}9021$, $\mathbf{w} = (0,\ 0{,}8507,\ 0{,}5257)^T$.

Hasil PAP (diperiksa dengan kode):

$$(4,\ -2{,}2361,\ 0), \qquad (-2{,}2361,\ 3{,}6000,\ 2{,}2000), \qquad (0,\ 2{,}2000,\ -0{,}6000)$$

Elemen $(1, 3)$ dan $(3, 1)$ menjadi nol. Jejak tetap $4 + 2 + 1 = 7$ dan $4 + 3{,}6000 + (-0{,}6000) = 7$, dan nilai eigen sebelum dan sesudah sama: $-1{,}6956$, $2{,}3084$, $6{,}3872$.

Contoh 3: Tridiagonalisasi matriks 4×4

Reduksi A dengan baris $(4, 1, 2, 2)$, $(1, 3, 0, 1)$, $(2, 0, 5, 1)$, $(2, 1, 1, 3)$ menjadi tridiagonal.

Penyelesaian.

Langkah $k = 1$: kolom di bawah diagonal $(1, 2, 2)^T$ memiliki norma 3, jadi $\alpha = -3$ dan elemen $(2, 1)$ menjadi -3; elemen $(3, 1), (4, 1)$ menjadi nol. Diagonal setelah langkah ini: $4,\ 5{,}2222,\ 3{,}8889,\ 1{,}8889$.

Langkah $k = 2$: kolom ke-2 di bawah subdiagonal membawa $\alpha = 0{,}7115$. Hasil akhir tridiagonal:

Diagonal utama: $4,\ 5{,}2222,\ 3{,}2168,\ 2{,}5610$.

Subdiagonal: $-3,\ 0{,}7115,\ -0{,}9512$.

Nilai eigen sebelum dan sesudah sama sampai ketelitian mesin: $1{,}3581, 2{,}0000, 3{,}8989, 7{,}7430$ (diperiksa dengan kode). Jejak: $4 + 3 + 5 + 3 = 15$ dan $4 + 5{,}2222 + 3{,}2168 + 2{,}5610 = 15$.

Kesalahan umum

• Memilih tanda α yang sama dengan $a_{k+1,\,k}$ sehingga $a_{k+1,\,k} - \alpha$ hampir nol dan terjadi pembatalan angka penting.

• Mengalikan PA saja, lupa mengalikan P dari kanan. Hanya PAP (transformasi similar) yang mempertahankan nilai eigen dan simetri.

• Membentuk matriks P penuh lalu mengalikannya dengan A: biayanya $O(n^3)$ per langkah dan menghilangkan keunggulan Householder; gunakan perkalian dengan $\mathbf{w}$.

• Mengira tridiagonalisasi sudah memberi nilai eigen. Ia hanya menyederhanakan matriks; nilai eigen masih dicari dengan iterasi (mis. algoritma QR).

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $n-2$ langkah sudah cukup untuk mencapai bentuk tridiagonal, dan mengapa langkah k tidak merusak nol yang sudah dibuat?
2. Bandingkan rotasi Givens dan refleksi Householder dari segi jumlah elemen yang ditolkan per transformasi dan biayanya.
3. Apa yang berubah bila A tidak simetrik? Mengapa hasilnya bukan tridiagonal?
4. Mengapa bentuk tridiagonal mempermudah mencari nilai eigen, dan apa kaitannya dengan algoritma QR?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung α untuk langkah pertama Householder pada A dengan kolom pertama $(1,\ 3,\ 4)^T$ (komponen ke-2 dan ke-3 di bawah diagonal adalah 3 dan 4).

Kunci: $q = 9+16 = 25$, $\alpha = -\operatorname{sgn}(3)\cdot 5 = -5$. Maka elemen $(2,1)$ menjadi -5 dan $(3,1)$ menjadi 0.

2. Buktikan bahwa $P = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ dengan $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ ortogonal.

Kunci: $P^T = P$ dan $P^TP = P^2 = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T + 4\mathbf{w}(\mathbf{w}^T\mathbf{w})\mathbf{w}^T = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T + 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T = I$.

3. Untuk $\mathbf{x} = (3,4)^T$, tentukan refleksi P yang memetakan $\mathbf{x}$ ke $-5\mathbf{e}_1$ dan periksa hasilnya.

Kunci: $\mathbf{v} = \mathbf{x} + 5\mathbf{e}_1 = (8,4)^T$, $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = 80$, $\mathbf{v}^T\mathbf{x} = 40$. $P\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{2\cdot 40}{80}\mathbf{v} = (3,4) - (8,4) = (-5,0)$.

Web by: Steven Paulus

9.5 The QR Algorithm

Rujukan buku: halaman 601

Algoritma QR adalah cara standar yang dipakai perangkat lunak modern untuk menghitung semua nilai eigen sebuah matriks. Idenya berbasis faktorisasi: setiap matriks A dapat ditulis $A = QR$ dengan Q ortogonal dan R segitiga atas. Bila kita membalik urutan perkaliannya, kita dapatkan matriks baru $A_{\text{baru}} = RQ$. Karena $R = Q^T A$, maka $RQ = Q^T AQ$ adalah transformasi similar ortogonal dari A, sehingga nilai eigennya tidak berubah. Mengulang proses ini menghasilkan barisan matriks yang similar satu sama lain.

Secara formal: mulai dari $A_1 = A$; pada langkah ke-k faktorkan $A_k = Q_k R_k$, lalu bentuk $A_{k+1} = R_k Q_k$. Hasil teori: bila nilai eigen A memiliki modulus berbeda, $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$, maka A_k menuju matriks segitiga atas dengan nilai eigen pada diagonal, terurut dari besar ke kecil (dan menuju diagonal bila A simetrik). Elemen di bawah diagonal pada posisi $(i+1, i)$ menyusut dengan laju sekitar $\left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right|^k$. Jadi algoritma ini pada hakikatnya adalah metode pangkat yang dijalankan serentak untuk semua vektor, dengan keortogonalan dipertahankan di tiap langkah.

Agar murah, algoritma dijalankan pada matriks tridiagonal hasil metode Householder (seksi 9.4). Faktorisasi QR pada matriks tridiagonal dapat dibuat dengan rotasi Givens: untuk menolkan elemen subdiagonal b di bawah elemen diagonal a, pilih

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad c = \frac{a}{r}, \qquad s = \frac{b}{r}$$

dan terapkan rotasi bidang dengan $\cos\theta = c$ dan $\sin\theta = s$ pada dua baris yang bersangkutan. Sebanyak $n-1$ rotasi mengubah matriks tridiagonal menjadi segitiga atas R, hasil kali rotasi-rotasi (transposenya) adalah Q, dan RQ ternyata tetap tridiagonal (bila A simetrik), sehingga bentuk tridiagonal terjaga di semua iterasi dengan biaya $O(n)$ per iterasi.

Kecepatan konvergensi bisa ditingkatkan sangat besar dengan pergeseran (shift). Pada tiap iterasi dipilih skalar σ_k dekat salah satu nilai eigen, lalu faktorkan $A_k - \sigma_k I = Q_k R_k$ dan bentuk $A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I$. Ini tetap similar dengan A_k karena $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$. Dengan memilih σ_k sama dengan elemen diagonal kanan-bawah $a_{nn}^{(k)}$ (atau pergeseran Wilkinson yang lebih cermat), elemen subdiagonal terakhir menuju nol dengan laju kuadratik atau kubik, jauh lebih cepat daripada laju linear tanpa pergeseran. Bila elemen subdiagonal cukup kecil, matriks dipecah (deflasi): elemen diagonal terakhir diambil sebagai nilai eigen, lalu iterasi dilanjutkan pada submatriks yang lebih kecil.

Kelebihan algoritma QR: stabil secara numerik karena hanya memakai transformasi ortogonal, memberikan semua nilai eigen sekaligus, dan dengan pergeseran sangat cepat. Kelemahannya: tanpa pergeseran lambat bila modulus nilai eigen berdekatan; untuk matriks umum yang tak simetrik, nilai eigen kompleks muncul dalam blok 2×2 sehingga dibutuhkan versi dengan pergeseran ganda. Nilai eigen yang diperoleh dapat dikombinasikan dengan metode pangkat invers (seksi 9.3) untuk mendapatkan vektor eigennya.

Konsep kunci

Faktorisasi QR — $A = QR$ dengan Q ortogonal dan R segitiga atas; ada untuk setiap matriks persegi.

Iterasi QR — $A_k = Q_k R_k$, $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$. Setiap A_k similar dengan A, sehingga nilai eigen terjaga.

Konvergensi ke bentuk segitiga — Untuk modulus nilai eigen yang berbeda, A_k menuju segitiga atas dengan diagonal nilai eigen terurut menurun; elemen $(i+1, i)$ menyusut

seperti $|\lambda_{i+1}/\lambda_i|^k$.

Rotasi Givens — Rotasi bidang dengan $c = a/r$, $s = b/r$ yang menolkan elemen b di bawah a; matriks tridiagonal butuh $n-1$ rotasi untuk menjadi segitiga.

Pergeseran (shift) — Faktorkan $A_k - \sigma_k I$ lalu tambahkan $\sigma_k I$ kembali. Dengan σ_k dekat suatu nilai eigen, konvergensi menjadi kuadratik atau lebih cepat.

Deflasi — Saat elemen subdiagonal terakhir cukup kecil, elemen diagonal terakhir diterima sebagai nilai eigen dan masalah diperkecil menjadi submatriks.

Bentuk awal tridiagonal — Reduksi Householder lebih dulu menghemat biaya: tiap iterasi QR pada matriks tridiagonal hanya $O(n)$ operasi dan bentuknya terjaga.

Iterasi QR

$$A_k = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$$

Iterasi QR dengan pergeseran

$$A_k - \sigma_k I = Q_k R_k, \qquad A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I$$

Rotasi Givens

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c = \tfrac{a}{r}, \quad s = \tfrac{b}{r}$$

Laju konvergensi tanpa pergeseran

$$\left| a_{i+1,\,i}^{(k)} \right| = O\left(\left| \tfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right|^k \right)$$

Algoritma: Iterasi QR dengan pergeseran untuk matriks simetrik tridiagonal

1. Masukkan A simetrik tridiagonal (diperoleh dari metode Householder), toleransi ε, dan iterasi maksimum.
2. Pilih pergeseran σ_k (misalnya $a_{nn}^{(k)}$ atau pergeseran Wilkinson).
3. Faktorkan $A_k - \sigma_k I = Q_k R_k$ dengan $n-1$ rotasi Givens yang menolkan subdiagonal.
4. Hitung $A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I$ (hasil tetap tridiagonal dan simetrik).
5. Bila $|a_{n,\,n-1}^{(k+1)}| < \varepsilon$, terima $a_{nn}^{(k+1)}$ sebagai nilai eigen, lalu perkecil matriks dengan membuang baris dan kolom terakhir. Bila subdiagonal lain kecil, pisahkan matriks menjadi blok.
6. Ulangi sampai semua nilai eigen ditemukan.

Contoh 1: Satu langkah QR pada matriks 2×2

Lakukan satu iterasi QR (tanpa pergeseran) pada A dengan baris $(2, 1)$ dan $(1, 3)$ memakai rotasi Givens.

Penyelesaian.

Pilih $a = 2$, $b = 1$: $r = \sqrt{5} = 2{,}2361$, $c = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}8944$, $s = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}4472$. Rotasi Q^T dengan baris (c, s) dan $(-s, c)$ menghasilkan

$$R = Q^T A = (2{,}2361,\ 2{,}2361) \text{ dan } (0,\ 2{,}2361)$$

(dua baris matriks segitiga atas R). Maka $A_2 = RQ$ berbaris $(3{,}0000,\ 1{,}0000)$ dan $(1{,}0000,\ 2{,}0000)$.

Nilai eigen sebenarnya $3{,}6180$ dan $1{,}3820$ (akar $\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$). Diagonal bergerak dari $(2, 3)$ ke $(3{,}0000,\ 2{,}0000)$; dibutuhkan beberapa iterasi lagi. Setelah delapan iterasi diagonal menjadi $3{,}6180$ dan $1{,}3820$.

Contoh 2: Iterasi QR tanpa pergeseran pada matriks tridiagonal 3×3

Jalankan iterasi QR pada A dengan baris $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 1)$, $(0, 1, 4)$ dan amati konvergensinya. Nilai eigen sebenarnya $3 + \sqrt{3}$, 3, $3 - \sqrt{3}$.

Penyelesaian.

Hasil (nilai mutlak subdiagonal, tanda bergantung pilihan Q):

$k = 1$: diagonal 3,0000, 3,0000, 3,0000; subdiagonal 1,0954, 1,3416.

$k = 2$: diagonal 3,7059, 3,5214, 1,7727; subdiagonal 0,9558, 0,9738.

$k = 4$: diagonal 4,4487, 3,2690, 1,2823; subdiagonal 0,6422, 0,1638.

$k = 8$: diagonal 4,7233, 3,0087, 1,2680; subdiagonal 0,1229, 0,0048.

Nilai eigen sebenarnya $4{,}7321$, $3{,}0000$, $1{,}2679$. Elemen subdiagonal pertama menyusut dengan rasio $\frac{3}{4{,}732} = 0{,}634$ per iterasi dan yang kedua dengan rasio $\frac{1{,}268}{3} = 0{,}423$; keduanya linear dan perlahan, itulah alasan perlunya pergeseran.

Contoh 3: Pengaruh pergeseran

Pada matriks yang sama, jalankan tiga iterasi dengan pergeseran $\sigma_k = a_{33}^{(k)}$ dan bandingkan dengan tanpa pergeseran.

Penyelesaian.

Pergeseran berturut-turut: $\sigma_1 = 4{,}0000$, $\sigma_2 = 4{,}3333$, $\sigma_3 = 4{,}6884$. Setelah tiga iterasi: diagonal 1,2737, 2,9943, 4,7320; subdiagonal 0,0993, 0,0072.

Elemen diagonal kanan-bawah $4{,}73202$ sudah sangat dekat dengan $3 + \sqrt{3} = 4{,}73205$ (galat $0{,}00003$), dan subdiagonal terakhir $0{,}00719$ hampir nol. Tanpa pergeseran, tiga iterasi menghasilkan subdiagonal terakhir sekitar $0{,}4162$ dan diagonal $a_{33} = 1{,}3553$ yang belum mendekati. Pada pergeseran, urutan nilai eigen yang ditemukan pertama adalah yang terdekat dengan pergeseran, bukan selalu yang terbesar.

Kesalahan umum

• Menjalankan iterasi QR langsung pada matriks penuh. Setiap iterasi $O(n^3)$; wajib reduksi ke bentuk tridiagonal atau Hessenberg lebih dulu.

• Lupa menambahkan kembali $\sigma_k I$ pada iterasi dengan pergeseran sehingga nilai eigen yang dilaporkan bergeser.

• Mengira A_k menuju diagonal untuk sembarang matriks. Untuk matriks tak simetrik hasilnya segitiga atas atau blok 2×2 (nilai eigen kompleks).

• Menghentikan iterasi hanya dengan melihat diagonal berubah sedikit, bukan dengan mengecek elemen subdiagonal (di luar diagonal) yang menjadi kecil.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa RQ similar dengan QR? Tuliskan hubungannya dengan transformasi ortogonal.
2. Jelaskan hubungan antara iterasi QR dan metode pangkat; apa yang berbeda ketika semua vektor diiterasi sekaligus?
3. Mengapa pergeseran dekat nilai eigen mempercepat konvergensi, dan apa risikonya bila pergeseran dipilih kurang cermat?
4. Bagaimana keterbatasan algoritma QR bila matriks memiliki dua nilai eigen dengan modulus sama?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Hitung r, c, s rotasi Givens yang menolkan elemen $b = 4$ di bawah $a = 3$.

Kunci: $r = \sqrt{9 + 16} = 5$, $c = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $s = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Terapkan rotasi: baris atas baru $0{,}6 \cdot 3 + 0{,}8 \cdot 4 = 5$, baris bawah $-0{,}8 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot 4 = 0$.

2. Untuk A dengan nilai eigen 8, 4, 1, taksir banyak iterasi QR tanpa pergeseran sampai elemen subdiagonal pertama berkurang faktor 10^{-6}.

Kunci: Rasio $\frac{4}{8} = 0{,}5$. Perlu $0{,}5^k < 10^{-6}$, yaitu $k > \frac{6}{\log_{10} 2} \approx 19{,}9$, sehingga sekitar 20 iterasi.

3. Tunjukkan bahwa $A_{k+1} = R_k Q_k + \sigma_k I$ similar dengan A_k.

Kunci: Dari $A_k - \sigma_k I = Q_k R_k$ didapat $R_k = Q_k^T (A_k - \sigma_k I)$. Maka $R_k Q_k + \sigma_k I = Q_k^T (A_k - \sigma_k I) Q_k + \sigma_k I = Q_k^T A_k Q_k$, similar dengan A_k lewat Q_k ortogonal.

Paulus Siahaan

9.6 Singular Value Decomposition

Rujukan buku: halaman 614

Dekomposisi nilai singular (SVD) memfaktorkan matriks apa pun, termasuk yang tidak persegi, menjadi hasil kali tiga matriks sederhana. Untuk A berukuran $m \times n$ ada matriks ortogonal U ($m \times m$) dan V ($n \times n$) serta matriks Σ ($m \times n$) yang elemen taknolnya hanya berada di diagonal utama, dengan

$$A = U\Sigma V^T, \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0, \quad p = \min(m, n)$$

Bilangan σ_i disebut nilai singular, kolom-kolom V vektor singular kanan, dan kolom-kolom U vektor singular kiri. Berbeda dengan nilai eigen, nilai singular selalu ada, real, dan tidak negatif, serta didefinisikan untuk matriks apa pun.

Hubungannya dengan masalah eigen sederhana. Dari $A = U\Sigma V^T$ diperoleh $A^TA = V\Sigma^T\Sigma V^T$ dan $AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$. Jadi kolom V adalah vektor eigen ortonormal dari A^TA (simetrik semidefinit positif), kolom U adalah vektor eigen dari AA^T, dan $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$. Untuk $\sigma_i > 0$ berlaku $A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ sehingga $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$. Ini memberi cara menghitung SVD pada contoh kecil, tetapi bukan cara yang baik untuk praktik: membentuk A^TA mengkuadratkan bilangan kondisi dan menghilangkan informasi tentang nilai singular kecil. Perangkat lunak membangun SVD dengan mereduksi A ke bentuk bidiagonal memakai refleksi Householder lalu menerapkan iterasi mirip QR (seksi 9.4 dan 9.5), sehingga akurat.

SVD membuka banyak informasi sekaligus. Peringkat (rank) A sama dengan banyaknya nilai singular taknol. Norma-2 adalah $\|A\|_2 = \sigma_1$ dan norma Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_p^2}$. Untuk matriks persegi taksingular bilangan kondisi norma-2 adalah $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$; nilai singular yang sangat kecil menandakan matriks hampir singular. Matriks pseudoinvers (Moore-Penrose) $A^+ = V\Sigma^+ U^T$, dengan Σ^+ diperoleh dengan membalik nilai singular taknol dan mentranspose, memberi solusi kuadrat terkecil berpanjang minimum $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ untuk masalah $\min \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$, bahkan ketika A kekurangan peringkat.

Penerapan terpenting adalah hampiran berperingkat rendah. Tulis SVD sebagai jumlah r matriks berperingkat satu, $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$, dan ambil k suku pertama: $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$. Teorema Eckart-Young menyatakan bahwa A_k adalah hampiran terbaik berperingkat paling banyak k untuk A, baik dalam norma-2 maupun norma Frobenius, dengan galat $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$. Inilah dasar kompresi citra, reduksi dimensi (misalnya analisis komponen utama), pemfilteran derau, dan sistem rekomendasi: informasi terpenting tersimpan pada nilai singular yang besar, sedangkan nilai singular kecil sering hanya derau.

Dibanding diagonalisasi, SVD lebih umum (berlaku untuk matriks persegi panjang dan tak simetrik) dan lebih stabil secara numerik, tetapi lebih mahal, sekitar $O(mn^2)$ untuk matriks $m \times n$ dengan $m \geq n$. Keputusan peringkat numerik (berapa nilai singular dianggap nol) mengandalkan ambang toleransi yang bergantung pada presisi mesin dan ukuran matriks.

Konsep kunci

Dekomposisi nilai singular — $A = U\Sigma V^T$ dengan U, V ortogonal dan Σ diagonal (persegi panjang) berisi $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$. Ada untuk setiap matriks real.

Nilai singular — $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}$: akar nilai eigen A^TA yang tak negatif. Mengukur seberapa besar A meregangkan ruang pada arah $\mathbf{v}_i$.

Vektor singular — Kolom V (kanan) adalah vektor eigen A^TA dan kolom U (kiri) vektor eigen AA^T, dengan $A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peringkat dan norma — Peringkat $=$ banyak $\sigma_i > 0$; $\|A\|_2 = \sigma_1$; $\|A\|_F^2 = \sum \sigma_i^2$; $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$ untuk A persegi taksingular.

Hampiran berperingkat rendah — $A_k = \sum_{i \le k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ adalah hampiran terbaik berperingkat k (Eckart-Young) dengan $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

Pseudoinvers — $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ memberikan solusi kuadrat terkecil berpanjang minimum $A^+\mathbf{b}$ untuk sistem apa pun.

Bahaya membentuk A^TA — Bilangan kondisi A^TA adalah kuadrat bilangan kondisi A, sehingga algoritma praktis menghindarinya dan memakai reduksi bidiagonal.

SVD

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

Hubungan dengan nilai eigen

$$A^TA\,\mathbf{v}_i = \sigma_i^2 \mathbf{v}_i, \qquad A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$$

Norma dan bilangan kondisi

$$\|A\|_2 = \sigma_1, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}, \quad \kappa_2(A) = \tfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Hampiran peringkat k (Eckart-Young)

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \qquad \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$$

Solusi kuadrat terkecil

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{b} = \sum_{\sigma_i > 0} \tfrac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i}\,\mathbf{v}_i$$

Algoritma: Menghitung SVD (cara hitung tangan untuk matriks kecil)

1. Bentuk A^TA dan cari nilai eigennya $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$ beserta vektor eigen ortonormal $\mathbf{v}_i$.
2. Hitung $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ dan susun $V = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]$.
3. Untuk setiap $\sigma_i > 0$ hitung $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$.
4. Bila $m >$ banyak σ_i taknol, lengkapi U dengan vektor ortonormal yang tegak lurus terhadap $\mathbf{u}_i$ yang sudah ada.
5. Periksa $A = U\Sigma V^T$. (Untuk matriks besar pakai bidiagonalisasi Householder dan iterasi QR, bukan A^TA.)

Contoh 1: SVD matriks 2×2

Cari SVD A dengan baris $(3, 0)$ dan $(4, 5)$.

Penyelesaian.

A^TA berbaris $(25, 20)$ dan $(20, 25)$. Nilai eigennya 45 dan 5, sehingga $\sigma_1 = \sqrt{45} = 6{,}7082$ dan $\sigma_2 = \sqrt{5} = 2{,}2361$. Vektor eigen ternormalisasi: $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ dan $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$.

Vektor singular kiri: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = (0{,}3162,\ 0{,}9487)^T$ dan $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = (0{,}9487,\ -0{,}3162)^T$. Perkalian $U\Sigma V^T$ memulihkan A sampai ketelitian mesin (dicek dengan kode). Pemeriksaan: $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 50 = \|A\|_F^2 = 9 + 0 + 16 + 25$.

Contoh 2: Hampiran peringkat satu dan bilangan kondisi

Untuk matriks contoh sebelumnya, tentukan hampiran peringkat satu terbaik, galatnya, dan bilangan kondisinya.

Penyelesaian.

$A_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T$ berbaris $(1{,}5,\ 1{,}5)$ dan $(4{,}5,\ 4{,}5)$. Galat $A - A_1$ memiliki norma-2 sama dengan $\sigma_2 = 2{,}2361$ (dihitung langsung dengan kode: $2{,}2361$), sesuai teorema Eckart-Young. Galat relatif $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0{,}3333$.

Bilangan kondisi norma-2: $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{45}{5}} = 3{,}0$. Bila memakai A^TA bilangan kondisinya 9, kuadrat dari 3, menunjukkan hilangnya ketelitian bila persamaan normal dipakai.

Contoh 3: Kuadrat terkecil dengan SVD

Selesaikan $\min \|B\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ untuk B berbaris $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ dan $\mathbf{b} = (1, 2, 3)^T$.

Penyelesaian.

B^TB berbaris $(2, 1)$ dan $(1, 2)$ dengan nilai eigen 3 dan 1, sehingga nilai singular B adalah $\sqrt{3} = 1{,}7321$ dan 1 (dikonfirmasi dengan kode: $1{,}7321$, $1{,}0000$). B berperingkat penuh, $\kappa_2(B) = \sqrt{3} = 1{,}7321$.

Solusi $\mathbf{x} = B^+\mathbf{b}$ memberi $\mathbf{x} = (0{,}6667,\ 1{,}6667)^T$ (tepatnya $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$), yang juga memenuhi persamaan normal $B^TB\mathbf{x} = B^T\mathbf{b} = (3, 4)^T$. Residu $B\mathbf{x} - \mathbf{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})^T$ dengan norma $2{,}3094$.

Kesalahan umum

• Menyamakan nilai singular dengan nilai eigen. Keduanya sama hanya untuk matriks simetrik semidefinit positif; untuk matriks simetrik umum nilai singular adalah nilai mutlak nilai eigen.

• Menghitung SVD dengan membentuk A^TA pada matriks bernilai singular kecil: bilangan kondisi dikuadratkan dan nilai singular kecil hilang ditelan galat pembulatan.

• Mengabaikan ketidakunikan tanda: pasangan $(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i)$ boleh dikalikan -1 bersamaan, dan vektor singular tidak unik bila ada nilai singular kembar.

• Menganggap bahwa $A^+\mathbf{b}$ meminimalkan residu hanya untuk matriks berperingkat penuh. Untuk peringkat kurang pun $A^+\mathbf{b}$ meminimalkan residu dan, di antara semua peminimal, berpanjang terkecil.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa nilai singular selalu ada dan tidak negatif untuk setiap matriks, sedangkan nilai eigen bisa kompleks dan matriks tertentu tidak memiliki cukup vektor eigen untuk didiagonalkan?
2. Bagaimana SVD dipakai untuk mengompres citra, dan bagaimana memilih peringkat k?
3. Mengapa $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$, dan apa artinya bila σ_n sangat kecil terhadap σ_1?
4. Bandingkan penyelesaian kuadrat terkecil lewat persamaan normal, QR, dan SVD dari segi stabilitas dan biaya.

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tentukan nilai singular matriks diagonal berisi -4 dan 3 (matriks 2×2 dengan diagonal $-4, 3$).

Kunci: $A^TA = \mathrm{diag}(16, 9)$ sehingga $\sigma_1 = 4$ dan $\sigma_2 = 3$ (nilai mutlak dari elemen diagonal). Tanda minus dipindahkan ke U atau V.

2. Matriks A berukuran 3×3 memiliki nilai singular 10, 2, $0{,}1$. Berapa $\kappa_2(A)$, galat hampiran peringkat 2 dalam norma-2, dan $\|A\|_F$?

Kunci: $\kappa_2 = \frac{10}{0{,}1} = 100$. Galat $\|A - A_2\|_2 = \sigma_3 = 0{,}1$. $\|A\|_F = \sqrt{100 + 4 + 0{,}01} = \sqrt{104{,}01} \approx 10{,}2$.

3. Tunjukkan bahwa $\|A\|_2 = \sigma_1$.

Kunci: $\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}$, dan nilai maksimum hasil bagi Rayleigh $\frac{\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ adalah nilai eigen terbesar A^TA, yaitu σ_1^2. Jadi $\|A\|_2 = \sigma_1$, dicapai di $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1$.

Pesan Utama

Ingat

Metode pangkat lambat bila $|\lambda_2/\lambda_1|$ mendekati 1; QR dengan pergeseran (shift) mengatasinya.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan