MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 10

Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Nonlinear

Numerical Solutions of Nonlinear Systems of Equations

Halaman buku 629 – 668 • 6 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Bab ini memperluas pencarian akar ke sistem persamaan nonlinear $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Iterasi titik tetap multivariabel konvergen bila pemetaan kontraktif. Metode Newton memakai matriks Jacobi: konvergen kuadratik, tetapi tiap iterasi membutuhkan penyelesaian sistem linear.

Metode quasi-Newton (Broyden) menghindari evaluasi Jacobi penuh. Penurunan tercuram mengubah masalah menjadi minimisasi $g = \sum f_i^2$ dan sering dipakai untuk mendapatkan tebakan awal yang baik; homotopi dan kontinuasi menelusuri solusi dari masalah mudah ke masalah sebenarnya.

Tujuan Pembelajaran

1. Menjalankan iterasi titik tetap dan Newton untuk sistem.
2. Menjelaskan perbedaan Newton dan Broyden dalam biaya per iterasi.
3. Menerapkan penurunan tercuram untuk tebakan awal.
4. Memahami ide dasar metode kontinuasi.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
10.1	Fixed Points for Functions of Several Variables	630	Def. 10.1; Def. 10.2; Def. 10.3; Teo. 10.4; Def. 10.5; Teo. 10.6; 2 contoh
10.2	Newton's Method	638	Teo. 10.7; 1 contoh
10.3	Quasi-Newton Methods	647	Teo. 10.8 (Sherman-Morrison Formula); 1 contoh
10.4	Steepest Descent Techniques	654	Def. 10.9; 1 contoh
10.5	Homotopy and Continuation Methods	660	Teo. 10.10; 2 contoh
10.6	Survey of Methods and Software	668	–

Rumus dan Metode Kunci

Newton untuk sistem

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} F(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

Bentuk praktis (selesaikan sistem linear)

$$J(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{y} = -F(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{y}$$

Fungsi tujuan penurunan tercuram

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\mathbf{x})]^2, \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(k)})$$

Homotopi

$$H(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x}) + (1-\lambda)(F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0))$$

10.1 Fixed Points for Functions of Several Variables

Rujukan buku: halaman 630

Banyak masalah nyata berujung pada sistem persamaan nonlinear: n persamaan dengan n peubah yang tidak dapat diselesaikan dengan manipulasi aljabar. Dengan memperkenalkan fungsi vektor $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ yang komponennya adalah $f_1,\ \dots,f_n$, sistem itu ditulis ringkas sebagai $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. Secara geometris, untuk $n=2$ solusi adalah titik potong dua kurva $f_1(x_1,x_2)=0$ dan $f_2(x_1,x_2)=0$ di bidang. Seksi ini memperluas metode titik tetap dari Bab 2 ke dimensi banyak, dan ia menjadi landasan bagi metode Newton, quasi-Newton, dan penurunan tercuram pada seksi-seksi berikutnya.

Sebelum bicara tentang iterasi, kita perlu perangkat dasar untuk fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$. Jarak diukur dengan sebuah norma vektor, biasanya norma maksimum $\|\mathbf{x}\|_\infty=\max_i|x_i|$. Kekontinuan fungsi $\mathbf{F}$ di suatu titik berarti setiap komponen f_i kontinu di titik itu; limitnya dipahami sebagai limit tiap komponen. Kekonvergenan barisan vektor $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ ke $\mathbf{x}$ berarti $\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}\|\to0$, dan karena semua norma di $\mathbb{R}^n$ ekuivalen, pilihan norma tidak mengubah apakah barisan konvergen. Titik tetap dari $\mathbf{G}:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ adalah $\mathbf{p}$ dengan $\mathbf{G}(\mathbf{p})=\mathbf{p}$.

Untuk mengubah $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ menjadi bentuk titik tetap, kita menyelesaikan setiap persamaan untuk satu peubah, atau secara umum mencari $\mathbf{G}$ sehingga $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ setara dengan $\mathbf{G}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$. Iterasinya sama persis dengan kasus satu peubah:

$$\mathbf{x}^{(k)}=\mathbf{G}\big(\mathbf{x}^{(k-1)}\big),\qquad k=1,2,\ \dots$$

Teorema kekonvergenan yang berlaku adalah analog dari teorema titik tetap satu dimensi. Misalkan $D=\{(x_1,\ \dots,x_n):a_i\le x_i\le b_i\}$ adalah kotak, $\mathbf{G}$ kontinu bersama turunan parsial pertamanya pada D, dan $\mathbf{G}(\mathbf{x})\in D$ untuk semua $\mathbf{x}\in D$. Bila ada konstanta $K<1$ sehingga untuk setiap baris i berlaku $\sum_j\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|\le K$ di seluruh D (syarat ini terpenuhi, misalnya, bila setiap $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|\le K/n$), maka $\mathbf{G}$ mempunyai titik tetap tunggal $\mathbf{p}\in D$, barisan iterasi konvergen ke $\mathbf{p}$ untuk sembarang $\mathbf{x}^{(0)}\in D$, dan berlaku batas galat

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{p}\|_\infty\le\frac{K^k}{1-K}\,\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$$

Bukti teorema ini memakai teorema nilai rata-rata pada setiap komponen, yang menghasilkan $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})-\mathbf{G}(\mathbf{y})\|_\infty\le K\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty$, yaitu $\mathbf{G}$ merupakan kontraksi pada D. Kotak harus konveks agar teorema nilai rata-rata dapat dipakai pada ruas garis antara dua titik. Perhatikan bahwa syarat pada matriks Jacobi $J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ hanyalah syarat cukup: ia mengatakan bahwa norma tak hingga Jacobi di seluruh D lebih kecil daripada 1. Secara lokal, yang menentukan sebenarnya adalah jari-jari spektral $\rho(J_{\mathbf{G}}(\mathbf{p}))$: bila $\rho<1$ iterasi konvergen untuk tebakan awal yang cukup dekat dengan $\mathbf{p}$, sedangkan bila $\rho>1$ iterasi menjauh.

Ada variasi penting yang mempercepat iterasi, yaitu gaya Gauss-Seidel. Pada iterasi biasa (gaya Jacobi) seluruh komponen $\mathbf{x}^{(k)}$ dihitung dari $\mathbf{x}^{(k-1)}$. Pada gaya Gauss-Seidel, komponen yang baru dihitung segera dipakai untuk komponen berikutnya: $x_i^{(k)}=g_i\big(x_1^{(k)},\ \dots,x_{i-1}^{(k)},x_i^{(k-1)},\ \dots,x_n^{(k-1)}\big)$. Pada banyak masalah cara ini konvergen lebih cepat, walau tidak ada jaminan umum bahwa ia selalu lebih baik.

Kelebihan metode titik tetap multidimensi adalah kesederhanaannya: tiap iterasi hanya memerlukan evaluasi $\mathbf{G}$, tanpa Jacobi maupun penyelesaian sistem linear. Kekurangannya, kekonvergenan hanya linear dengan laju sekitar K, dan menemukan bentuk $\mathbf{G}$ yang kontraktif sering sulit dan bergantung pada masalahnya. Karena itu metode ini jarang dipakai sendirian untuk sistem yang sukar; ia lebih berfungsi sebagai kerangka teori. Seksi 10.2 akan memperlihatkan bahwa metode Newton adalah iterasi titik tetap dengan pilihan $\mathbf{G}$ yang membuat Jacobi bernilai nol di titik tetap, sehingga kekonvergenannya kuadrat.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Fungsi vektor dan fungsi koordinat — Sistem n persamaan nonlinear ditulis $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dengan $\mathbf{F} = (f_1,\ \dots,\ f_n)^t$; tiap $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ disebut fungsi koordinat.

Norma dan kekonvergenan vektor — Kekonvergenan $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ berarti $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \to 0$; semua norma di $\mathbb{R}^n$ ekuivalen, sehingga konvergen terhadap satu norma berarti konvergen terhadap semuanya.

Titik tetap di $\mathbb{R}^n$ — Vektor $\mathbf{p}$ dengan $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Mencari akar $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dapat diubah menjadi mencari titik tetap dari $\mathbf{G}$.

Kontraksi pada kotak — Bila $\mathbf{G}$ memetakan kotak D ke dirinya dan $\|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y})\|_\infty \le K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$ dengan $K < 1$, maka titik tetap ada, tunggal, dan iterasi konvergen dari titik awal mana pun di D.

Syarat Jacobi — Cukup memeriksa $\sum_j \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right| \le K < 1$ pada D untuk tiap baris i (norma tak hingga dari matriks Jacobi).

Iterasi Gauss-Seidel — Komponen yang sudah diperbarui pada iterasi berjalan dipakai langsung untuk menghitung komponen berikutnya. Sering lebih cepat, tetapi tanpa jaminan umum.

Kekonvergenan linear — Galat berkurang kira-kira dengan faktor K (atau $\rho(J_{\mathbf{G}}(\mathbf{p}))$) per iterasi, jauh lebih lambat daripada kekonvergenan kuadrat metode Newton.

Bentuk sistem nonlinear

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \dots,\ f_n(\mathbf{x}))^t = \mathbf{0}$$

Iterasi titik tetap

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Syarat kontraksi (baris Jacobi)

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \le K < 1, \quad i = 1,\ \dots, n,\ \mathbf{x} \in D$$

Batas galat apriori

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_\infty \le \frac{K^k}{1-K}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$$

Gauss-Seidel untuk titik tetap

$$x_i^{(k)} = g_i\left(x_1^{(k)},\ \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)},\ \dots, x_n^{(k-1)}\right)$$

Algoritma: Iterasi titik tetap untuk sistem

1. Ubah $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ menjadi $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ dan tentukan kotak D yang dipetakan $\mathbf{G}$ ke dirinya sendiri.
2. Periksa syarat kontraksi: hitung $K = \max_{\mathbf{x}\in D} \max_i \sum_j \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|$ dan pastikan $K < 1$.
3. Pilih $\mathbf{x}^{(0)} \in D$, toleransi ε, dan batas iterasi N.

4. Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$: hitung $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ (atau versi Gauss-Seidel).
5. Jika $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < \varepsilon$, keluarkan $\mathbf{x}^{(k)}$ dan berhenti; jika N habis, laporkan kegagalan.

Contoh 1: Iterasi titik tetap pada sistem dua peubah

Sistem $x = 0{,}3\sin y + 0{,}2$, $y = 0{,}4\cos x$ berbentuk $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ dengan $g_1 = 0{,}3\sin y + 0{,}2$ dan $g_2 = 0{,}4\cos x$. Tunjukkan syarat teorema pada $D = [0,1] \times [0,1]$, lalu lakukan iterasi dari $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^t$.

Penyelesaian.

Pemetaan ke dirinya: untuk $y \in [0,1]$, $g_1 \in [0{,}2;\ 0{,}2 + 0{,}3\sin 1] \subset [0,1]$, dan untuk $x \in [0,1]$, $g_2 \in [0{,}4\cos 1;\ 0{,}4] \subset [0,1]$. Jadi $\mathbf{G}(D) \subset D$.

Syarat Jacobi: $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$, $\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| = 0{,}3|\cos y| \le 0{,}3$, $\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| = 0{,}4|\sin x| \le 0{,}4\sin 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$. Jumlah baris terbesar adalah $K = 0{,}4\sin 1 \approx 0{,}3366 < 1$. Maka titik tetap ada dan tunggal di D.

Iterasi: $\mathbf{x}^{(1)} = (0{,}2000;\ 0{,}4000)^t$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0{,}3168;\ 0{,}3920)^t$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0{,}3146;\ 0{,}3801)^t$, $\mathbf{x}^{(4)} = (0{,}3113;\ 0{,}3804)^t$, $\mathbf{x}^{(5)} = (0{,}31138;\ 0{,}38077)^t$. Iterasi menuju $\mathbf{p} \approx (0{,}31149;\ 0{,}38075)^t$.

Contoh 2: Memeriksa batas galat

Untuk sistem pada contoh sebelumnya, bandingkan batas galat apriori dengan galat sebenarnya setelah 3 dan 5 iterasi, lalu hitung banyak iterasi yang dijamin cukup untuk galat di bawah 10^{-6}.

Penyelesaian.

Dari $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^t$ dan $\mathbf{x}^{(1)} = (0{,}2;\ 0{,}4)^t$ diperoleh $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = 0{,}4$. Dengan $K \approx 0{,}3366$ dan norma selisih tersebut sama dengan $0{,}4$:

$$\text{batas}_3 = \frac{K^3}{1-K} \cdot 0{,}4 \approx 2{,}30 \times 10^{-2}, \qquad \text{galat sebenarnya} \approx 3{,}13 \times 10^{-3}$$

$$\text{batas}_5 = \frac{K^5}{1-K} \cdot 0{,}4 \approx 2{,}60 \times 10^{-3}, \qquad \text{galat sebenarnya} \approx 1{,}08 \times 10^{-4}$$

Batas selalu di atas galat sebenarnya, tetapi cukup ketat. Untuk toleransi 10^{-6} kita perlu $\frac{K^k}{1-K} \cdot 0{,}4 < 10^{-6}$, yaitu $k > \frac{\ln\left(10^{-6}(1-K)/0{,}4\right)}{\ln K}$, sehingga $k = 13$ iterasi dijamin cukup.

Contoh 3: Jacobi versus Gauss-Seidel

Dengan sistem yang sama dan $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)^t$, berapa iterasi yang dibutuhkan agar $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$ pada iterasi biasa dan pada Gauss-Seidel?

Penyelesaian.

Iterasi biasa (Jacobi) memerlukan 8 iterasi. Pada Gauss-Seidel, $x^{(k)} = 0{,}3\sin y^{(k-1)} + 0{,}2$ langsung dipakai pada $y^{(k)} = 0{,}4\cos x^{(k)}$. Langkah pertama memberi $(0{,}2;\ 0{,}3920)^t$, dan hanya diperlukan 5 iterasi dengan hasil $(0{,}311485;\ 0{,}380752)^t$. Gauss-Seidel lebih cepat di sini, sejalan dengan pengalaman umum.

Kesalahan umum

• Memeriksa syarat kontraksi hanya di titik tetap atau di tebakan awal. Teorema memerlukan syarat pada seluruh kotak D (atau pada lingkungan titik tetap untuk hasil lokal).

• Lupa memeriksa bahwa $\mathbf{G}$ memetakan D ke dalam D. Tanpa ini, iterasi bisa keluar dari daerah tempat syarat Jacobi berlaku.

• Menjumlahkan turunan parsial per kolom, bukan per baris. Untuk norma tak hingga, yang dijumlahkan adalah harga mutlak elemen sepanjang baris matriks Jacobi.

• Menganggap Gauss-Seidel pasti lebih cepat. Pada beberapa masalah ia justru lebih lambat atau tidak konvergen padahal iterasi biasa konvergen, dan sebaliknya.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa teorema titik tetap multidimensi memerlukan kotak (himpunan konveks) dan bukan sembarang himpunan tertutup?
2. Hubungkan syarat $\sum_j |\partial g_i/\partial x_j| \le K < 1$ dengan jari-jari spektral Jacobi di titik tetap. Dalam keadaan apa syarat norma terlalu ketat?
3. Bagaimana Anda memilih bentuk $\mathbf{G}$ dari $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$? Apakah pilihan itu unik, dan apa dampaknya pada laju kekonvergenan?
4. Mengapa iterasi Gauss-Seidel bergantung pada urutan penomoran peubah, sedangkan iterasi biasa tidak?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Pandang $g_1 = 0{,}25y + 0{,}5$, $g_2 = 0{,}5x + 0{,}25$ dan $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$. Hitung $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ dan titik tetapnya.

Kunci: $\mathbf{x}^{(1)} = (0{,}50;\ 0{,}25)^t$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0{,}5625;\ 0{,}5000)^t$. Titik tetap memenuhi $x = 0{,}25y + 0{,}5$, $y = 0{,}5x + 0{,}25$, yaitu $(0{,}6429;\ 0{,}5714)^t = \left(\frac{9}{14}, \frac{4}{7}\right)^t$. Syarat kontraksi dipenuhi dengan $K = 0{,}5$.

2. Bila $K = 0{,}5$ dan $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = 1$, berapa k terkecil yang menjamin galat $\le 10^{-8}$ menurut batas apriori?

Kunci: Perlu $\frac{0{,}5^k}{0{,}5} \cdot 1 \le 10^{-8}$, yaitu $2^k \ge 2 \times 10^8$, jadi $k \ge \log_2(2 \times 10^8) \approx 27{,}6$ sehingga $k = 28$.

3. Untuk $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ dengan B matriks 2×2 dengan kedua elemen diagonal $0{,}8$ dan kedua elemen luar diagonal $0{,}5$, dan $\mathbf{c} = (1, 1)^t$, periksa syarat kontraksi norma tak hingga dan tentukan apakah iterasi dari $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ konvergen.

Kunci: Jumlah baris $|0{,}8| + |0{,}5| = 1{,}3 > 1$, jadi syarat tidak terpenuhi. Nilai eigen B adalah $1{,}3$ dan $0{,}3$, sehingga $\rho(B) = 1{,}3 > 1$: iterasi divergen. Titik tetapnya $(-3{,}3333;\ -3{,}3333)^t$ ada, tetapi iterasi dari $\mathbf{0}$ memberi komponen pertama $1{,}0;\ 2{,}30;\ 3{,}990;\ \ldots$ yang membesar tanpa batas.

Steven Paulus Siahaan

10.2 Newton's Method

Rujukan buku: halaman 638

Pada Seksi 10.1 sistem $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ diubah menjadi masalah titik tetap $\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$, tetapi pengubahan itu biasanya dilakukan dengan akal-akalan aljabar yang tidak selalu mungkin. Metode Newton untuk sistem memberi resep yang sistematis. Idenya meniru kasus satu variabel: di sana kita mencari $g(x) = x - \phi(x) f(x)$ yang konvergen kuadratik, dan pilihan $\phi(x) = 1/f'(x)$ melahirkan metode Newton. Untuk sistem, faktor skalar ϕ diganti sebuah matriks $A(x)$ berukuran $n \times n$ yang entrinya fungsi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$, sehingga fungsi iterasinya berbentuk

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Agar iterasi $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ konvergen kuadratik, syarat yang dituntut adalah semua turunan pertama komponen $\mathbf{G}$ lenyap di solusi $\mathbf{p}$, yaitu $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(\mathbf{p}) = 0$ untuk semua i, k (disertai kekontinuan turunan kedua yang terbatas di sekitar $\mathbf{p}$). Dengan menurunkan $g_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_j b_{ij}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})$, dengan b_{ij} entri A^{-1}, dan memakai $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, suku yang memuat turunan b_{ij} hilang di $\mathbf{p}$, dan syaratnya berubah menjadi $A(\mathbf{p})^{-1} J(\mathbf{p}) = I$. Jadi $A(\mathbf{p})$ haruslah matriks Jacobi $J(\mathbf{p})$, dengan $J(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$. Pilihan paling wajar adalah $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$ di mana-mana, dan itulah metode Newton:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J\big(\mathbf{x}^{(k-1)}\big)^{-1}\mathbf{F}\big(\mathbf{x}^{(k-1)}\big).$$

Dalam praktik invers J tidak pernah dihitung. Pada tiap iterasi kita menyelesaikan sistem linear $J(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ dengan eliminasi Gauss atau faktorisasi LU, lalu memperbarui $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{y}$. Vektor $\mathbf{y}$ sekaligus menjadi ukuran galat: iterasi dihentikan bila $\|\mathbf{y}\| < \mathrm{TOL}$, atau bila jumlah iterasi maksimum terlewati. Secara geometri, tiap langkah mengganti $\mathbf{F}$ dengan hampiran linearnya di sekitar tebakan sekarang, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}) + J(\mathbf{x}^{(k-1)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k-1)})$, lalu mengambil titik nol dari model linear itu.

Hasil teoretisnya (versi lokal, dinyatakan dengan syarat baku): bila $\mathbf{F}$ terdiferensial kontinu di sekitar solusi $\mathbf{p}$, $J(\mathbf{p})$ taksingular, dan J memenuhi syarat Lipschitz di sekitar $\mathbf{p}$ (misalnya turunan kedua $\mathbf{F}$ kontinu), maka ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $\mathbf{x}^{(0)}$ dengan $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{p}\| < \delta$ barisan Newton konvergen ke $\mathbf{p}$ dan $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\| \le C\,\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}\|^2$. Kata kuncinya adalah lokal: kuadrat galat hanya berarti bila galat awal sudah kecil. Secara kasar jumlah angka benar menjadi dua kali lipat pada tiap iterasi setelah tebakan cukup dekat, seperti pada kasus satu variabel.

Harga yang dibayar cukup mahal. Setiap iterasi memerlukan evaluasi n fungsi f_i dan n^2 turunan parsial (total sekurang-kurangnya $n^2 + n$ evaluasi skalar), ditambah $O(n^3)$ operasi aritmetika untuk menyelesaikan sistem linearnya. Selain itu, metode ini butuh tebakan awal yang baik dan $J(\mathbf{x})$ yang taksingular sepanjang iterasi; bila J hampir singular, langkah $\mathbf{y}$ bisa sangat besar dan iterasi terlempar jauh. Dua kelemahan tersebut dijawab oleh seksi-seksi berikutnya: Seksi 10.3 mengganti J dengan hampiran yang diperbarui murah (metode quasi-Newton, Broyden), Seksi 10.4 mencari tebakan awal dengan penurunan tercuram, dan Seksi 10.5 memakai metode kontinuasi yang tidak menuntut tebakan awal yang bagus. Dalam praktik, Newton sering dikombinasikan dengan peredaman langkah ($\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + t\mathbf{y}$ dengan $0 < t \le 1$) untuk memperluas daerah konvergensi, tetapi itu merupakan pengembangan di luar bahan pokok seksi ini.

Konsep kunci

Matriks Jacobi — Matriks $J(\mathbf{x})$ dengan entri $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$; ia adalah turunan $\mathbf{F}$ dan memberi hampiran linear $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}) + J(\mathbf{x})\mathbf{h}$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Pilihan $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$ — Konvergensi kuadratik menuntut $A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})$. Karena itu fungsi iterasi Newton adalah $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Langkah Newton lewat sistem linear — Selesaikan $J(\mathbf{x}^{(k-1)})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ lalu tambahkan $\mathbf{y}$. Invers J tidak dihitung secara eksplisit karena mahal dan kurang stabil.

Konvergensi kuadratik lokal — Bila $J(\mathbf{p})$ taksingular dan J Lipschitz di sekitar $\mathbf{p}$, galat memenuhi $\|\mathbf{e}_k\| \le C\|\mathbf{e}_{k-1}\|^2$ asalkan tebakan awal cukup dekat dengan $\mathbf{p}$.

Biaya per iterasi — Sekurangnya $n^2 + n$ evaluasi fungsi skalar dan $O(n^3)$ operasi untuk sistem linear. Ini mahal untuk n besar.

Ketaksingularan Jacobi — Jika $J(\mathbf{x}^{(k)})$ singular, langkah Newton tidak terdefinisi; jika hampir singular, langkahnya sangat besar. Titik tempat J singular adalah sumber kegagalan utama.

Kriteria berhenti — Biasanya $\|\mathbf{y}\| < \mathrm{TOL}$ (selisih dua iterasi), kadang ditambah $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| < \mathrm{TOL}$, dengan batas iterasi maksimum sebagai pengaman.

Fungsi iterasi Newton

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Matriks Jacobi

$$J(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \qquad 1 \le i, j \le n$$

Iterasi dua langkah

$$J(\mathbf{x}^{(k-1)})\,\mathbf{y}^{(k-1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{y}^{(k-1)}$$

Kekonvergenan kuadratik lokal

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\| \le C\,\|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}\|^2$$

Algoritma: Metode Newton untuk sistem

1. Masukkan n, tebakan awal $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, toleransi TOL dan batas iterasi N. Set $k = 1$.
2. Selama $k \le N$: hitung $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ dan matriks Jacobi $J(\mathbf{x})$ dengan $J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$.
3. Selesaikan sistem linear $n \times n$ $J(\mathbf{x})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (eliminasi Gauss atau LU, bukan invers eksplisit).
4. Perbarui $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$.
5. Jika $\|\mathbf{y}\| < \mathrm{TOL}$, keluarkan $\mathbf{x}$ sebagai hampiran solusi dan berhenti; bila tidak, set $k \leftarrow k + 1$.
6. Jika N iterasi habis tanpa memenuhi kriteria, laporkan bahwa batas iterasi terlampaui.

Contoh 1: Dua langkah Newton untuk lingkaran dan hiperbola

Sistem $x^2+y^2-4=0$, $xy-1=0$ memiliki solusi $(x,y)=(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})\approx(1{,}931852;\ 0{,}517638)$. Lakukan dua iterasi Newton dari $\mathbf{x}^{(0)}=(2;\ 0{,}5)^t$.

Penyelesaian.

Di sini $\mathbf{F}(x,y)=(x^2+y^2-4,\ \ xy-1)^t$ dan matriks Jacobi-nya mudah ditulis per baris.

Baris pertama Jacobi adalah $(2x,\ 2y)$ dan baris keduanya $(y,\ x)$. Iterasi 1: $\mathbf{F}(2;0{,}5)=(0{,}25;\ 0)^t$, baris Jacobi $(4;\ 1)$ dan $(0{,}5;\ 2)$. Sistem $4y_1+y_2=-0{,}25$, $0{,}5y_1+2y_2=0$ memberi $y_2=-y_1/4$ sehingga $3{,}75\,y_1=-0{,}25$, yaitu $y_1=-\frac{1}{15}$, $y_2=\frac{1}{60}$. Maka $\mathbf{x}^{(1)}=(1{,}933333;\ 0{,}516667)^t$ dengan $\|\mathbf{y}\|_\infty=0{,}0667$.

Iterasi 2: $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})=(0{,}004722;\ \ -0{,}001111)^t$. Menyelesaikan sistem linearnya memberi $\mathbf{y}=(-0{,}001481;\ 0{,}000970)^t$, jadi $\mathbf{x}^{(2)}=(1{,}931853;\ 0{,}517637)^t$. Langkah berikutnya hanya berukuran $1{,}09\times10^{-6}$ dan setelah itu $8{,}0\times10^{-13}$.

Ukuran langkah $0{,}0667;\ 1{,}5\times10^{-3};\ 1{,}1\times10^{-6};\ 8\times10^{-13}$ memperlihatkan kuadratnya galat: $1{,}09\times10^{-6}\approx0{,}5\times(1{,}48\times10^{-3})^2$.

Contoh 2: Sistem dengan komponen linear

Terapkan dua iterasi Newton pada $x+y-3=0$, $x^2+y^2-5=0$ dari $\mathbf{x}^{(0)}=(0;\ 3)^t$ (solusi: $(1;\ 2)$ dan $(2;\ 1)$).

Penyelesaian.

Baris Jacobi: $(1,\ 1)$ dan $(2x,\ 2y)$. Di $(0;3)$: $\mathbf{F}=(0;\ 4)^t$ dan baris kedua $(0;\ 6)$. Sistem $y_1+y_2=0$, $6y_2=-4$ memberi $\mathbf{y}=(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3})^t$, sehingga $\mathbf{x}^{(1)}=(\frac{2}{3};\ \frac{7}{3})^t$.

Di $\mathbf{x}^{(1)}$: $\mathbf{F}=(0;\ \frac{8}{9})^t$ dan baris kedua $(\frac{4}{3};\ \frac{14}{3})$. Dari $y_1+y_2=0$ dan $\frac{4}{3}y_1+\frac{14}{3}y_2=-\frac{8}{9}$ diperoleh $y_2=-\frac{4}{15}$, $y_1=\frac{4}{15}$, jadi $\mathbf{x}^{(2)}=(\frac{14}{15};\ \frac{31}{15})^t=(0{,}9333;\ 2{,}0667)^t$.

Perhatikan bahwa persamaan linear $x+y=3$ terpenuhi persis sejak iterasi pertama: Newton menyelesaikan bagian linear secara eksak. Langkah-langkah selanjutnya $0{,}267;\ 0{,}063;\ 0{,}0039;\ 1{,}5\times10^{-5}$ menuju $(1;\ 2)$.

Contoh 3: Menghitung biaya satu iterasi

Untuk $n=50$, berapa evaluasi fungsi skalar dan operasi kira-kira yang dibutuhkan satu iterasi Newton bila Jacobi dievaluasi eksak?

Penyelesaian.

Evaluasi $\mathbf{F}$ memerlukan $n=50$ evaluasi dan matriks Jacobi $n^2=2500$ evaluasi, jadi $n^2+n=2550$ evaluasi skalar. Penyelesaian sistem linear dengan faktorisasi LU memerlukan sekitar $\frac{2}{3}n^3=\frac{2}{3}\cdot125\,000\approx8{,}3\times10^4$ perkalian/penjumlahan. Bila n naik menjadi 100, evaluasi menjadi $10\,100$ (naik sekitar empat kali) dan operasi linear naik sekitar delapan kali menjadi $\approx6{,}7\times10^5$.

Kesalahan umum

• Menghitung $J(\mathbf{x})^{-1}$ secara eksplisit lalu mengalikannya dengan $\mathbf{F}$. Lebih murah dan lebih stabil menyelesaikan $J\mathbf{y} = -\mathbf{F}$ langsung dengan eliminasi.

• Tertukar tanda: memakai $J\mathbf{y} = \mathbf{F}$ lalu menambahkan $\mathbf{y}$, padahal sistemnya harus $J\mathbf{y} = -\mathbf{F}$ (atau kurangkan $\mathbf{y}$).

• Salah menyusun Jacobi (menukar indeks baris dan kolom, sehingga yang dipakai J^t). Baris ke-i harus memuat turunan f_i terhadap semua variabel.

• Menganggap Newton selalu konvergen kuadratik dari sembarang tebakan. Jaminannya hanya lokal, dan bila J singular atau hampir singular di sepanjang jalan iterasi, metode bisa gagal atau melompat ke solusi lain.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa syarat $\partial g_i/\partial x_k(\mathbf{p}) = 0$ mengarah pada pilihan $A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})$, dan apa yang terjadi bila hanya $A(\mathbf{x}) \approx J(\mathbf{x})$?
2. Bagaimana metode Newton untuk sistem tereduksi ke metode Newton satu variabel bila $n = 1$?
3. Apa yang tergantung pada $\mathbf{x}^{(0)}$ dalam hasil konvergensi lokal, dan bagaimana tebakan awal yang baik bisa diperoleh?
4. Bandingkan biaya Newton dengan biaya iterasi titik tetap biasa pada Seksi 10.1. Kapan Newton tetap lebih menguntungkan walau per iterasinya mahal?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x - y = 0$ dengan $\mathbf{x}^{(0)} = (1;\ 0)^t$, hitung $\mathbf{x}^{(1)}$ dan $\mathbf{x}^{(2)}$ dengan metode Newton, lalu bandingkan dengan solusi $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$.

Kunci: $\mathbf{F}(1;0) = (0;\ 1)^t$, Jacobi baris $(2;\ 0)$ dan $(1;\ -1)$. Sistem $2y_1 = 0$, $y_1 - y_2 = -1$ memberi $\mathbf{y} = (0;\ 1)^t$, jadi $\mathbf{x}^{(1)} = (1;\ 1)^t$. Di sana $\mathbf{F} = (1;\ 0)^t$, Jacobi baris $(2;\ 2)$ dan $(1;\ -1)$, sehingga $\mathbf{y} = (-0{,}25;\ -0{,}25)^t$ dan $\mathbf{x}^{(2)} = (0{,}75;\ 0{,}75)^t$, yang mendekati $0{,}7071$.

2. Tuliskan matriks Jacobi untuk $f_1 = xe^y - 2$, $f_2 = x^2 + \sin y - 1$, lalu lakukan satu iterasi Newton dari $(1;\ 0)^t$.

Kunci: Baris Jacobi: $(e^y,\ xe^y)$ dan $(2x,\ \cos y)$. Di $(1;0)$: baris $(1;\ 1)$ dan $(2;\ 1)$, dengan $\mathbf{F} = (-1;\ 0)^t$. Sistem $y_1 + y_2 = 1$, $2y_1 + y_2 = 0$ memberi $y_1 = -1$, $y_2 = 2$, jadi $\mathbf{x}^{(1)} = (0;\ 2)^t$.

3. Misalkan $\|\mathbf{e}_k\| \approx 10^{-2}$ dan $\|\mathbf{e}_{k+1}\| \le \|\mathbf{e}_k\|^2$ (konstanta $C = 1$). Perkirakan galat tiga iterasi kemudian.

Kunci: $\|\mathbf{e}_{k+1}\| \le 10^{-4}$, $\|\mathbf{e}_{k+2}\| \le 10^{-8}$, $\|\mathbf{e}_{k+3}\| \le 10^{-16}$: banyak angka benar berlipat dua tiap iterasi (hingga dibatasi oleh galat pembulatan mesin).

4. Mengapa Newton gagal untuk $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x - y = 0$ bila dimulai dari $(0;\ 0)^t$?

Kunci: Di $(0;0)$: $\mathbf{F} = (-2;\ 0)^t$ dan Jacobi baris $(2x,\ 2y) = (0,\ 0)$ serta $(1;\ -1)$. Baris pertama nol, sehingga sistem $J\mathbf{y} = -\mathbf{F}$ memberi $0 = 2$: tak konsisten, J singular, dan langkah Newton tidak terdefinisi.

Steven Paulus Siahaan

10.3 Quasi-Newton Methods

Rujukan buku: halaman 647

Kelemahan terbesar metode Newton untuk sistem adalah biayanya. Setiap iterasi menuntut n^2 turunan parsial untuk membentuk matriks Jacobi, n evaluasi fungsi, dan $O(n^3)$ operasi untuk menyelesaikan sistem linear. Bila turunan eksak sulit diperoleh, turunan dapat dihampiri dengan beda hingga, misalnya $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \approx \frac{f_j(\mathbf{x}+h\mathbf{e}_k)-f_j(\mathbf{x})}{h}$ dengan h kecil dan $\mathbf{e}_k$ vektor satuan ke-k, tetapi itu tetap memerlukan sedikitnya n^2 evaluasi fungsi skalar dan tidak mengurangi pekerjaan aljabar linearnya. Metode quasi-Newton menyerang kedua beban itu sekaligus.

Idenya diambil dari metode secant. Pada satu variabel, $f'(x_1)$ diganti hasil bagi selisih $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Untuk sistem, pembagian oleh vektor tidak terdefinisi, sehingga kita mengganti $J(\mathbf{x}^{(i)})$ dengan matriks A_i yang memenuhi syarat secant, yakni mereproduksi perubahan $\mathbf{F}$ yang baru saja teramati. Dengan notasi $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}$ dan $\mathbf{y}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$, syaratnya adalah

$$A_i\,\mathbf{s}_i = \mathbf{y}_i.$$

Syarat ini hanya menetapkan kerja A_i pada arah $\mathbf{s}_i$. Untuk arah yang tegak lurus terhadap $\mathbf{s}_i$ tidak ada informasi baru tentang $\mathbf{F}$, sehingga diputuskan agar A_i tidak berubah di sana: $A_i\mathbf{z} = A_{i-1}\mathbf{z}$ bila $\mathbf{s}_i^{t}\mathbf{z} = 0$. Kedua syarat ini menentukan A_i secara tunggal, yaitu pembaruan rank-satu Broyden (pembaruan perubahan terkecil)

$$A_i = A_{i-1} + \frac{(\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i)\,\mathbf{s}_i^{t}}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}, \qquad \mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - A_i^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}).$$

Langkah pertama biasanya memakai $A_0 = J(\mathbf{x}^{(0)})$ (eksak atau beda hingga), yaitu satu iterasi Newton biasa. Setelah itu, tidak ada lagi turunan yang perlu dihitung: tiap iterasi hanya satu evaluasi $\mathbf{F}$, yaitu n evaluasi skalar. Tetapi bila pembaruan ini dipakai apa adanya, kita masih harus menyelesaikan sistem linear $A_i\mathbf{s}_{i+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})$ dengan $O(n^3)$ operasi. Penghematan berikutnya datang dari rumus Sherman-Morrison: bila A taksingular dan $1 + \mathbf{v}^{t}A^{-1}\mathbf{u} \neq 0$, maka $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^{t}$ taksingular dan

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^{t})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\,\mathbf{v}^{t}A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^{t}A^{-1}\mathbf{u}}.$$

Menerapkannya pada pembaruan Broyden menghasilkan invers yang diperbarui langsung dari invers sebelumnya (dengan syarat penyebutnya tidak nol):

$$A_i^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_i - A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i)\,\mathbf{s}_i^{t}A_{i-1}^{-1}}{\mathbf{s}_i^{t}A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i}.$$

Rumus ini hanya melibatkan perkalian matriks-vektor dan perkalian luar, sehingga biaya aritmetika turun menjadi $O(n^2)$ per iterasi, sedangkan evaluasi fungsi tinggal n. Harganya adalah laju konvergensi: kuadratik Newton turun menjadi superlinear, yakni $\lim_{i\to\infty} \frac{\|\mathbf{x}^{(i+1)}-\mathbf{p}\|}{\|\mathbf{x}^{(i)}-\mathbf{p}\|} = 0$. Dalam kebanyakan aplikasi pertukaran ini menguntungkan. Kekurangan lain: tidak seperti Newton, metode Broyden tidak mengoreksi diri sendiri, sehingga galat pembulatan atau pembaruan yang buruk dapat bertahan kecuali ada pengaman tambahan, mis. menghitung ulang Jacobi sesekali. Metode ini sering dipakai sebagai pengganti Newton bila Jacobi mahal, dan seperti Newton ia tetap butuh tebakan awal yang baik, yang dapat dicari lewat penurunan tercuram (Seksi 10.4) atau kontinuasi (Seksi 10.5).

Konsep kunci

Metode quasi-Newton — Metode yang mengganti Jacobi $J(\mathbf{x}^{(i)})$ dengan hampiran A_i yang diperbarui murah sepanjang iterasi, sehingga turunan tidak perlu dihitung ulang.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Syarat secant — $A_i \mathbf{s}_i = \mathbf{y}_i$ dengan $\mathbf{s}_i = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}$ dan $\mathbf{y}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$; ini perluasan metode secant ke sistem.

Pembaruan perubahan terkecil — Broyden memilih A_i yang memenuhi syarat secant dan tidak mengubah kerja A_{i-1} pada vektor yang tegak lurus $\mathbf{s}_i$, sehingga perubahannya berpangkat satu.

Rumus Sherman-Morrison — Invers $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t$ dapat diperoleh dari A^{-1} dengan koreksi berpangkat satu, asalkan $1 + \mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u} \neq 0$; itu menghindari inversi baru di tiap iterasi.

Konvergensi superlinear — $\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{p}\| / \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{p}\| \to 0$. Lebih lambat daripada kuadratik Newton, tetapi lebih cepat daripada linear.

Tidak mengoreksi diri — Newton cenderung memperbaiki galat pembulatan pada iterasi berikutnya, sedangkan Broyden mewarisi kekeliruan pada A_i tanpa pengaman khusus.

Penghematan biaya — Dari $n^2 + n$ evaluasi skalar dan $O(n^3)$ operasi (Newton) menjadi n evaluasi dan $O(n^2)$ operasi (Broyden dengan Sherman-Morrison).

Syarat secant

$$A_i\,\mathbf{s}_i = \mathbf{y}_i, \qquad \mathbf{s}_i = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}, \quad \mathbf{y}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$$

Pembaruan Broyden

$$A_i = A_{i-1} + \frac{(\mathbf{y}_i - A_{i-1}\mathbf{s}_i)\,\mathbf{s}_i^t}{\|\mathbf{s}_i\|_2^2}$$

Sherman-Morrison

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\,\mathbf{v}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u}}$$

Pembaruan invers Broyden

$$A_i^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{(\mathbf{s}_i - A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i)\,\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}}{\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i}$$

Langkah quasi-Newton

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - A_i^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})$$

Algoritma: Metode Broyden

1. Masukkan tebakan awal $\mathbf{x}$, toleransi TOL, dan batas iterasi N. Hitung $A_0 = J(\mathbf{x})$ (eksak atau beda hingga) dan $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$; hitung $A = A_0^{-1}$ dengan eliminasi Gauss.
2. Langkah pertama (seperti Newton): $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$, $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
3. Untuk $k = 2, 3, \ldots, N$: simpan $\mathbf{w} = \mathbf{v}$; hitung $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dan $\mathbf{y} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$.
4. Hitung $\mathbf{z} = -A\mathbf{y}$ dan $p = -\mathbf{s}^t\mathbf{z}$ (jadi $p = \mathbf{s}^t A^{-1}\mathbf{y}$); hitung $\mathbf{u}^t = \mathbf{s}^t A$.
5. Perbarui invers: $A \leftarrow A + \frac{1}{p}(\mathbf{s} + \mathbf{z})\mathbf{u}^t$. Pastikan $p \neq 0$.
6. Hitung langkah baru $\mathbf{s} = -A\mathbf{v}$ dan $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
7. Jika $\|\mathbf{s}\| < \mathrm{TOL}$, keluarkan $\mathbf{x}$ dan berhenti. Bila N habis, laporkan kegagalan.

Contoh 1: Memeriksa rumus Sherman-Morrison pada matriks 2×2

Misalkan A matriks diagonal dengan diagonal 2 dan 1, $\mathbf{u} = (1, 1)^t$, $\mathbf{v} = (1, 2)^t$. Hitung $(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1}$ dengan rumus Sherman-Morrison dan periksa hasilnya.

Penyelesaian.

A^{-1} diagonal dengan diagonal $0{,}5$ dan 1. Maka $A^{-1}\mathbf{u} = (0{,}5;\ 1)^t$ dan $\mathbf{v}^t A^{-1} = (0{,}5;\ 2)$, sehingga $\mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u} = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$ dan penyebutnya $1 + 2{,}5 = 3{,}5 \neq 0$.

Perkalian luar $A^{-1}\mathbf{u}\,\mathbf{v}^t A^{-1}$ mempunyai baris $(0{,}25;\ 1)$ dan $(0{,}5;\ 2)$. Dibagi $3{,}5$ dan dikurangkan dari A^{-1}.

Hasilnya: baris pertama $(0{,}4286;\ -0{,}2857)$ dan baris kedua $(-0{,}1429;\ 0{,}4286)$.

Pemeriksaan: $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t$ mempunyai baris $(3;\ 2)$ dan $(1;\ 3)$ dengan determinan $9 - 2 = 7$, sehingga inversnya $\tfrac{1}{7}$ kali matriks dengan baris $(3;\ -2)$ dan $(-1;\ 3)$, yaitu baris $(0{,}4286;\ -0{,}2857)$ dan $(-0{,}1429;\ 0{,}4286)$. Cocok.

Contoh 2: Satu pembaruan Broyden

Untuk $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $xy - 1 = 0$ dengan $\mathbf{x}^{(0)} = (2;\ 0{,}5)^t$ dan $A_0 = J(\mathbf{x}^{(0)})$ (baris $(4;\ 1)$ dan $(0{,}5;\ 2)$), lakukan dua langkah Broyden dan bandingkan dengan Newton.

Penyelesaian.

Invers A_0 memiliki baris $(0{,}266667;\ -0{,}133333)$ dan $(-0{,}066667;\ 0{,}533333)$. Langkah pertama sama dengan Newton: $\mathbf{x}^{(1)} = (1{,}933333;\ 0{,}516667)^t$, dengan $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = (0{,}004722;\ -0{,}001111)^t$.

Selanjutnya $\mathbf{s}_1 = (-0{,}066667;\ 0{,}016667)^t$ dan $\mathbf{y}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = (-0{,}245278;\ -0{,}001111)^t$. Dihitung $A_0^{-1}\mathbf{y}_1 = (-0{,}065259;\ 0{,}015759)^t$, $\mathbf{s}_1^t A_0^{-1} = (-0{,}018889;\ 0{,}017778)$ dan penyebut $\mathbf{s}_1^t A_0^{-1}\mathbf{y}_1 = 0{,}0046133$.

Pembaruan invers memberi A_1^{-1} dengan baris $(0{,}272429;\ -0{,}138757)$ dan $(-0{,}070382;\ 0{,}536830)$. Syarat secant terpenuhi: $A_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{y}_1$ dengan A_1 berbaris $(3{,}9333;\ 1{,}0167)$ dan $(0{,}5157;\ 1{,}9961)$. Lalu $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} - A_1^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = (1{,}931893;\ 0{,}517596)^t$.

Galat maksimum terhadap solusi $(1{,}931852;\ 0{,}517638)$: $1{,}48 \times 10^{-3}$ ($\mathbf{x}^{(1)}$), $4{,}3 \times 10^{-5}$ ($\mathbf{x}^{(2)}$), $4{,}0 \times 10^{-7}$, $6{,}3 \times 10^{-9}$, $1{,}2 \times 10^{-11}$ untuk $\mathbf{x}^{(3)}, \mathbf{x}^{(4)}, \mathbf{x}^{(5)}$. Newton dari titik yang sama memberi $1{,}5 \times 10^{-3}$, $1{,}1 \times 10^{-6}$, 8×10^{-13}: Newton lebih cepat per iterasi, tetapi Broyden tidak memakai Jacobi lagi sesudah langkah pertama.

Contoh 3: Perbandingan biaya untuk $n = 100$

Bandingkan banyaknya evaluasi fungsi skalar per iterasi dan orde operasi aritmetika antara Newton dan Broyden bila $n = 100$.

Penyelesaian.

Newton: $n^2 + n = 10\,100$ evaluasi skalar (Jacobi dan $\mathbf{F}$) dan sekitar $\tfrac{2}{3}n^3 \approx 6{,}7 \times 10^5$ operasi untuk sistem linear. Broyden (bentuk Sherman-Morrison): hanya $n = 100$ evaluasi $\mathbf{F}$ dan operasi berorde $n^2 = 10^4$ (dengan konstanta kecil) per iterasi. Penghematan sekitar seratus kali pada evaluasi dan puluhan kali pada aljabar linear, dengan imbalan beberapa iterasi tambahan karena konvergensi hanya superlinear.

Kesalahan umum

• Mengira Broyden memberi hampiran Jacobi yang akurat. Matriks A_i hanya dijamin memenuhi syarat secant pada arah langkah terakhir; ia bisa berbeda cukup jauh dari $J(\mathbf{x}^{(i)})$ pada arah lain.

• Lupa bahwa langkah pertama memerlukan $A_0 = J(\mathbf{x}^{(0)})$ (atau hampirannya). Tanpa tebakan awal untuk A_0 metode tidak dapat dimulai.

• Mengabaikan penyebut $\mathbf{s}_i^t A_{i-1}^{-1}\mathbf{y}_i$: bila nilainya (hampir) nol, pembaruan invers tidak terdefinisi atau sangat tidak stabil.

• Menganggap konvergensi superlinear sama dengan kuadratik. Rasio galat menuju nol, tetapi galat tidak dikuadratkan, sehingga biasanya diperlukan satu atau dua iterasi lebih banyak daripada Newton.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa informasi dari $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i-1)})$ hanya menentukan A_i pada arah $\mathbf{s}_i$, dan apa dasar keputusan untuk membiarkan arah-arah ortogonalnya tidak berubah?
2. Pada $n = 1$, ke bentuk apa pembaruan Broyden tereduksi?
3. Dalam situasi apa kehilangan sifat mengoreksi diri pada Broyden menjadi masalah serius, dan pengaman apa yang masuk akal?
4. Kapan Newton dengan Jacobi beda hingga lebih baik daripada Broyden, dan kapan sebaliknya?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $n = 1$, tunjukkan bahwa pembaruan Broyden $A_i = A_{i-1} + \dfrac{(y_i - A_{i-1}s_i)s_i}{s_i^2}$ memberi $A_i = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$.

Kunci: Karena $y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ dan $s_i = x_i - x_{i-1}$ adalah skalar, $A_i = A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1}s_i}{s_i} = \frac{y_i}{s_i}$, yaitu persis hasil bagi selisih metode secant.

2. Dengan $A = \operatorname{diag}$ berdiagonal $(3;\ 1)$, $\mathbf{u} = (1;\ 0)^t$ dan $\mathbf{v} = (0;\ 1)^t$, hitung $(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1}$ dengan Sherman-Morrison.

Kunci: $A^{-1}\mathbf{u} = (1/3;\ 0)^t$, $\mathbf{v}^t A^{-1} = (0;\ 1)$, $\mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u} = 0$ sehingga penyebut $= 1$ dan perkalian luar $=$ baris $(0;\ 1/3)$ dan $(0;\ 0)$. Hasil: baris $(1/3;\ -1/3)$ dan $(0;\ 1)$. Cek: $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t$ berbaris $(3;\ 1)$ dan $(0;\ 1)$, inversnya berbaris $(1/3;\ -1/3)$ dan $(0;\ 1)$.

3. Pada Broyden dengan $n = 2$ diketahui $A_0^{-1} = I$, $\mathbf{s} = (1;\ 0)^t$ dan $\mathbf{y} = (2;\ 1)^t$. Hitung A_1^{-1} dan periksa $A_1^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{s}$.

Kunci: $A_0^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}$, $\mathbf{s} - \mathbf{y} = (-1;\ -1)^t$, $\mathbf{s}^t A_0^{-1} = (1;\ 0)$, penyebut $\mathbf{s}^t\mathbf{y} = 2$. Perkalian luar berbaris $(-1;\ 0)$ dan $(-1;\ 0)$; dibagi 2: A_1^{-1} berbaris $(0{,}5;\ 0)$ dan $(-0{,}5;\ 1)$. Cek: $A_1^{-1}\mathbf{y} = (0{,}5 \cdot 2;\ -0{,}5 \cdot 2 + 1) = (1;\ 0) = \mathbf{s}$.

4. Berapa evaluasi fungsi skalar per iterasi yang dihemat Broyden dibanding Newton untuk $n = 20$?

Kunci: Newton memakai $n^2 + n = 420$ evaluasi; Broyden $n = 20$. Selisihnya $400 = n^2$ evaluasi per iterasi (setelah langkah pertama).

Web by: Steven Paulus Siahaan

10.4 Steepest Descent Techniques

Rujukan buku: halaman 654

Metode Newton dan quasi-Newton cepat, tetapi hanya bila tebakan awal sudah cukup dekat dengan solusi. Metode penurunan tercuram (steepest descent) berada di ujung yang berlawanan: konvergensinya hanya linear, namun biasanya tetap menurunkan galat walaupun tebakan awalnya buruk. Peranannya mirip metode bisection pada satu persamaan: menyediakan hampiran kasar yang kemudian dipoles oleh metode cepat. Metode ini bernilai tersendiri sebagai metode meminimumkan fungsi $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Kaitannya dengan sistem nonlinear $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, adalah sebagai berikut. Bentuk fungsi galat

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\mathbf{x})]^2 = \|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2^2 \geq 0.$$

Nilai $g(\mathbf{x}) = 0$ tercapai persis di titik $\mathbf{x}$ yang menyelesaikan sistem, sehingga menyelesaikan sistem sama dengan mencari minimum global g yang bernilai nol. Penurunan tercuram mencari minimum lokal dengan mengulang tiga langkah: hitung g di titik sekarang, tentukan arah yang menurunkan g, lalu bergerak sejauh yang cocok pada arah itu.

Arah terbaik dijawab oleh kalkulus. Gradien $\nabla g(\mathbf{x}) = (\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n})^t$ bernilai nol di minimum lokal yang terdiferensial. Turunan arah g pada arah vektor satuan $\mathbf{v}$ adalah $D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^t \nabla g(\mathbf{x})$, yang terbesar bila $\mathbf{v}$ sejajar ∇g (bila $\nabla g \neq \mathbf{0}$). Jadi g naik tercuram sepanjang ∇g dan turun tercuram sepanjang $-\nabla g$. Untuk $g = \|\mathbf{F}\|_2^2$ diperoleh $\nabla g(\mathbf{x}) = 2J(\mathbf{x})^t \mathbf{F}(\mathbf{x})$ dengan J matriks Jacobi, sehingga gradiennya dapat dihitung dari bahan yang sama dengan metode Newton. Iterasinya

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad \alpha > 0.$$

Tinggal memilih α. Idealnya α meminimumkan fungsi satu variabel $h(\alpha) = g(\mathbf{x}^{(k)} - \alpha \nabla g(\mathbf{x}^{(k)}))$, tetapi mencari titik minimum h secara eksak terlalu mahal. Sebagai gantinya ambil tiga titik $\alpha_1 = 0 < \alpha_2 < \alpha_3$ yang diharapkan berdekatan dengan lokasi minimum, bentuk polinom kuadrat $P(\alpha)$ yang menginterpolasi h di ketiganya, dan pakai titik minimum P sebagai α. Secara praktis (vektor arah dinormalkan menjadi satuan $\mathbf{z} = \nabla g / \|\nabla g\|_2$): $\alpha_1 = 0$ sehingga $g_1 = g(\mathbf{x})$ sudah diketahui; α_3 dimulai dari 1 dan dibagi dua berulang sampai $g_3 = g(\mathbf{x} - \alpha_3 \mathbf{z}) < g_1$ (pasti terjadi bila $\nabla g \neq \mathbf{0}$ karena $\mathbf{z}$ arah turun); $\alpha_2 = \alpha_3/2$. Dengan selisih terbagi Newton, $P(\alpha) = g_1 + h_1 \alpha + h_3 \alpha(\alpha - \alpha_2)$ untuk $h_1 = \frac{g_2 - g_1}{\alpha_2}$, $h_2 = \frac{g_3 - g_2}{\alpha_3 - \alpha_2}$, $h_3 = \frac{h_2 - h_1}{\alpha_3}$, dan titik kritisnya adalah $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \frac{h_1}{h_3})$. Karena $P(\alpha_3) < P(\alpha_1)$, minimum P pada $[\alpha_1, \alpha_3]$ ada di α_0 atau di ujung α_3; kita ambil yang memberi g lebih kecil.

Sifat dan batasan. Penurunan tercuram menjamin g turun pada tiap langkah (bila α dipilih dengan benar), tetapi kekonvergenannya hanya linear, dan sangat lambat bila permukaan g berbentuk lembah sempit (kondisi buruk): langkah-langkah beruntun cenderung zig-zag. Selain itu metode hanya menjamin titik kritis, yaitu minimum lokal, yang belum tentu nilainya nol. Nilai $g > 0$ di titik berhenti berarti bukan solusi sistem. Karena $\nabla g = 2J^t \mathbf{F}$, titik kritis dengan $g > 0$ hanya mungkin di titik tempat J singular. Itulah alasan penurunan tercuram dipakai secukupnya, beberapa iterasi untuk membawa tebakan ke daerah tarikan metode Newton atau Broyden, bukan sampai ketelitian akhir.

Konsep kunci

Fungsi galat kuadrat — $g(\mathbf{x}) = \sum_i f_i(\mathbf{x})^2 \geq 0$. Sistem $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ terpecahkan di $\mathbf{x}$ jika dan hanya jika $g(\mathbf{x}) = 0$, yaitu minimum globalnya.

Gradien — ∇g adalah vektor turunan parsial g. Di minimum lokal terdiferensial berlaku $\nabla g = \mathbf{0}$; untuk $g = \|\mathbf{F}\|_2^2$, $\nabla g = 2J^t\mathbf{F}$.

Turunan arah — $D_{\mathbf{v}}g(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^t\nabla g(\mathbf{x})$ untuk $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Nilainya maksimum bila $\mathbf{v}$ sejajar gradien dan minimum bila berlawanan.

Arah tercuram — $-\nabla g(\mathbf{x})$ adalah arah penurunan g paling tajam secara lokal, sehingga langkahnya $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \alpha\nabla g(\mathbf{x})$.

Pencarian garis kuadratik — Memilih α dengan menginterpolasi $h(\alpha) = g(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{z})$ di tiga titik $0, \alpha_3/2, \alpha_3$ lewat parabola, lalu meminimumkan parabola itu.

Konvergensi linear dan lembah sempit — Laju hanya linear, dan lambat bila kelengkungan g sangat berbeda pada berbagai arah (kondisi buruk): iterasi zig-zag.

Minimum lokal palsu — Metode dapat berhenti di titik kritis dengan $g > 0$. Karena $\nabla g = 2J^t\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, titik itu mestilah titik singular Jacobi.

Fungsi galat kuadrat

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(\mathbf{x})]^2$$

Gradien dari sistem

$$\nabla g(\mathbf{x}) = 2\, J(\mathbf{x})^t\, \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Iterasi tercuram

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha\, \nabla g(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad \alpha > 0$$

Parabola interpolasi

$$P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2), \qquad h_1 = \tfrac{g_2 - g_1}{\alpha_2},\ h_2 = \tfrac{g_3 - g_2}{\alpha_3 - \alpha_2},\ h_3 = \tfrac{h_2 - h_1}{\alpha_3}$$

Titik kritis parabola

$$\alpha_0 = \tfrac{1}{2}\left(\alpha_2 - \tfrac{h_1}{h_3}\right)$$

Algoritma: Penurunan tercuram

1. Masukkan tebakan awal $\mathbf{x}$, toleransi TOL, batas iterasi N. Set $k = 1$.
2. Selama $k \le N$: hitung $g_1 = g(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = \nabla g(\mathbf{x})$, $z_0 = \|\mathbf{z}\|_2$. Jika $z_0 = 0$, berhenti (gradien nol, mungkin titik minimum).
3. Normalkan $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z}/z_0$. Set $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $g_3 = g(\mathbf{x} - \alpha_3\mathbf{z})$.
4. Selama $g_3 \ge g_1$: $\alpha_3 \leftarrow \alpha_3/2$ dan hitung ulang g_3. Jika $\alpha_3 < \mathrm{TOL}/2$, berhenti dengan pesan tidak ada perbaikan yang berarti.
5. Set $\alpha_2 = \alpha_3/2$, $g_2 = g(\mathbf{x} - \alpha_2\mathbf{z})$; hitung h_1, h_2, h_3 lalu $\alpha_0 = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - h_1/h_3)$ dan $g_0 = g(\mathbf{x} - \alpha_0\mathbf{z})$.
6. Pilih $\alpha \in \{\alpha_0, \alpha_3\}$ yang memberi g lebih kecil; set $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \alpha\mathbf{z}$ dan $g \leftarrow g(\mathbf{x})$.

7. Jika $|g - g_1| < \mathrm{TOL}$, keluarkan $\mathbf{x}$ dan berhenti. Bila tidak, $k \leftarrow k+1$ dan ulangi; bila N habis laporkan kegagalan.

Contoh 1: Tiga iterasi tercuram untuk lingkaran dan hiperbola

Sistem $f_1 = x^2 + y^2 - 4 = 0$, $f_2 = xy - 1 = 0$ memiliki solusi $\approx (1{,}9319;\ 0{,}5176)$. Terapkan penurunan tercuram pada $g = f_1^2 + f_2^2$ dari $\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ 0)^t$.

Penyelesaian.

$\mathbf{F}(3;0) = (5;\ -1)^t$ dan Jacobi berbaris $(6;\ 0)$ dan $(0;\ 3)$. Maka $g = 26$ dan $\nabla g = 2J^t\mathbf{F} = (60;\ -6)^t$ dengan norma $60{,}299$, sehingga $\mathbf{z} = (0{,}995037;\ -0{,}099504)^t$.

Dengan $\alpha_3 = 1$: $g_3 = 0{,}6417 < 26$ diterima. $\alpha_2 = 0{,}5$: $g_2 = 5{,}8962$. Selisih terbagi: $h_1 = -40{,}208$, $h_2 = -10{,}509$, $h_3 = 29{,}699$, sehingga $\alpha_0 = 0{,}5(0{,}5 + 40{,}208/29{,}699) = 0{,}9269$ dengan $g_0 = 0{,}7592 > g_3$. Jadi dipilih $\alpha = \alpha_3 = 1$: $\mathbf{x}^{(1)} = (2{,}004963;\ 0{,}099504)^t$, $g = 0{,}6417$.

Iterasi 2: ∇g bernorma $3{,}199$; α_3 diperkecil menjadi $0{,}5$ ($g_3 = 0{,}1462$), $\alpha_2 = 0{,}25$ ($g_2 = 0{,}1047$), dan parabola memberi $\alpha_0 = 0{,}3570$ dengan $g_0 = 0{,}0450$ yang terkecil. Hasil $\mathbf{x}^{(2)} = (1{,}99609;\ 0{,}456428)^t$, $g = 0{,}04504$. Iterasi 3 memberi $\mathbf{x}^{(3)} = (1{,}95037;\ 0{,}456529)^t$ dan $g = 0{,}01217$.

Dalam tiga iterasi g turun dari 26 ke $0{,}012$ dan tebakan sudah dekat solusi, cukup baik sebagai titik awal Newton. Dari $\mathbf{x}^{(3)}$, Newton memberi galat $1{,}2 \times 10^{-3}$, $8{,}1 \times 10^{-7}$, $4{,}5 \times 10^{-13}$ pada tiga iterasi berikutnya.

Contoh 2: Zig-zag pada fungsi kuadrat

Untuk $g(x, y) = x^2 + 10y^2$ (minimum $(0, 0)$), terapkan penurunan tercuram dengan α eksak dari $(10;\ 1)$ dan tunjukkan lajunya.

Penyelesaian.

$\nabla g = (2x;\ 20y)^t$. Untuk fungsi kuadrat dengan Hessian $H = \mathrm{diag}(2;\ 20)$, α eksak adalah $\alpha = \frac{\nabla g^t \nabla g}{\nabla g^t H \nabla g}$. Di titik awal ini bernilai $\frac{1}{11}$.

Perhitungan memberi $\alpha = \frac{1}{11}$ pada setiap iterasi, dan $\mathbf{x}^{(k+1)} = (\frac{9}{11}x_k;\ -\frac{9}{11}y_k)^t$: iterasi $(10;1) \to (8{,}1818;\ -0{,}8182) \to (6{,}6942;\ 0{,}6694) \to (5{,}4771;\ -0{,}5477)$. Tanda y bolak-balik (zig-zag) dan nilai g turun $110 \to 73{,}64 \to 49{,}29 \to 33{,}00$, tiap iterasi hanya dikali $(\frac{9}{11})^2 \approx 0{,}669$.

Faktor $\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} = \frac{10 - 1}{10 + 1} = \frac{9}{11}$ memakai rasio nilai eigen Hessian $\kappa = 20/2 = 10$. Makin besar κ makin dekat faktor itu ke 1, yakni makin lambat konvergensinya.

Contoh 3: Satu pencarian garis dengan interpolasi kuadrat

Pada suatu iterasi $g_1 = 10$ (di $\alpha_1 = 0$), $g_2 = 4$ (di $\alpha_2 = 0{,}5$), $g_3 = 6$ (di $\alpha_3 = 1$). Tentukan α_0 dan nilai parabola di sana.

Penyelesaian.

$h_1 = \frac{4-10}{0{,}5} = -12$, $h_2 = \frac{6-4}{0{,}5} = 4$, $h_3 = \frac{4-(-12)}{1} = 16$. Maka $\alpha_0 = \frac{1}{2}(0{,}5 - \frac{-12}{16}) = \frac{1}{2}(0{,}5 + 0{,}75) = 0{,}625$. Nilai parabola $P(0{,}625) = 10 - 12(0{,}625) + 16(0{,}625)(0{,}125) = 10 - 7{,}5 + 1{,}25 = 3{,}75$, lebih rendah dari $g_2 = 4$ dan $g_3 = 6$. Jadi $\alpha = \alpha_0$ dipilih (bila $g(\mathbf{x} - \alpha_0 \mathbf{z})$ benar-benar lebih kecil).

Kesalahan umum

• Menganggap penurunan tercuram selalu berakhir di solusi sistem. Metode dapat berhenti di minimum lokal dengan $g > 0$; contohnya untuk $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $xy - 1 = 0$ dari $(1; 1)$ iterasi menuju $(1{,}3416;\ 1{,}3416)$ dengan $g = 0{,}8$ (di sana J singular).

• Memakai gradien yang salah: lupa faktor 2 atau mentranspos J. Gradiennya $2J^t\mathbf{F}$, bukan $2J\mathbf{F}$. Kesalahan faktor 2 hanya mengubah skala langkah, tetapi kesalahan transpos mengubah arah.

• Memakai α tetap yang terlalu besar sehingga g naik. Itu sebabnya α_3 dibagi dua sampai $g_3 < g_1$.

• Mengharapkan ketelitian tinggi dari metode ini. Konvergensinya linear dan bisa zig-zag; tujuan utamanya hanya memberi tebakan awal untuk Newton atau Broyden.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $-\nabla g$ adalah arah penurunan tercuram? Jelaskan lewat turunan arah dan ketaksamaan Cauchy-Schwarz.
2. Apa kaitan $g(\mathbf{x}) = 0$ dengan solusi sistem, dan mengapa pula minimum lokal dengan $g > 0$ berarti J singular di titik itu?
3. Mengapa pencarian α lewat interpolasi kuadrat cukup, dan tidak perlu meminimumkan $h(\alpha)$ secara eksak?
4. Bagaimana penurunan tercuram, Newton, dan kontinuasi (Seksi 10.5) dapat dikombinasikan dalam satu strategi penyelesaian sistem?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $g = x^2 + 4y^2$ dari $(2;\ 1)$, hitung langkah tercuram dengan α eksak dan bandingkan g sebelum dan sesudahnya.

Kunci: $\nabla g = (4;\ 8)^t$, $H = \mathrm{diag}(2;\ 8)$, $\alpha = \frac{80}{2 \cdot 16 + 8 \cdot 64} = \frac{80}{544} = 0{,}14706$. $\mathbf{x}^{(1)} = (1{,}41176;\ -0{,}17647)^t$, g turun dari 8 ke $2{,}1176$.

2. Untuk $x + y - 3 = 0$, $xy - 2 = 0$ di $(1;\ 1)^t$, hitung g dan $\nabla g = 2J^t\mathbf{F}$.

Kunci: $\mathbf{F} = (-1;\ -1)^t$, $g = 2$. Jacobi berbaris $(1;\ 1)$ dan $(y;\ x) = (1;\ 1)$; $J^t\mathbf{F} = (-2;\ -2)^t$, jadi $\nabla g = (-4;\ -4)^t$ dan arah turun $\propto (1;\ 1)$. (Perhatikan J singular di titik ini, tetapi gradien tetap terdefinisi.)

3. Jelaskan mengapa jika $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ dan $J(\mathbf{x}^*)$ taksingular maka $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Kunci: $\nabla g = 2J^t\mathbf{F} = \mathbf{0}$ dan J^t taksingular (karena J taksingular) sehingga satu-satunya penyelesaian adalah $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Jadi minimum palsu ($g > 0$) hanya mungkin bila J singular.

4. Diketahui $g_1 = 5$ (di 0), $g_2 = 2$ (di $0{,}25$), $g_3 = 3$ (di $0{,}5$). Hitung α_0 dan nilai parabola di α_0.

Kunci: $h_1 = -12$, $h_2 = 4$, $h_3 = \frac{4+12}{0{,}5} = 32$. $\alpha_0 = \frac{1}{2}(0{,}25 + \frac{12}{32}) = 0{,}3125$.
$P(0{,}3125) = 5 - 3{,}75 + 32(0{,}3125)(0{,}0625) = 1{,}875$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

10.5 Homotopy and Continuation Methods

Rujukan buku: halaman 660

Metode homotopi atau kontinuasi menyelesaikan $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dengan cara yang berbeda: masalah yang sukar ditanam ke dalam sebuah keluarga masalah yang diberi parameter $\lambda \in [0,1]$. Pada $\lambda = 0$ solusinya diketahui, pada $\lambda = 1$ kita memperoleh masalah yang sebenarnya, dan kita menelusuri solusi sepanjang λ dari 0 sampai 1. Bila $\mathbf{x}^{(0)}$ adalah sembarang tebakan awal, homotopi yang paling sederhana adalah

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\lambda - 1)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}).$$

Di $\lambda = 0$ persamaan $\mathbf{G}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{0}$ jelas dipenuhi oleh $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$, dan di $\lambda = 1$ persamaannya adalah $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Bila untuk setiap λ solusi $\mathbf{x}(\lambda)$ ada dan tunggal, himpunan $\{\mathbf{x}(\lambda)\}$ membentuk kurva dari $\mathbf{x}^{(0)}$ menuju solusi yang dicari. Masalah kontinuasi adalah menelusuri kurva itu.

Bila $\mathbf{x}(\lambda)$ terdiferensial, turunkan $\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{0}$ terhadap λ: $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}'(\lambda) = \mathbf{0}$. Untuk homotopi di atas, $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = J(\mathbf{x})$ dan $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$, sehingga lintasan solusi memenuhi masalah nilai awal

$$\mathbf{x}'(\lambda) = -J(\mathbf{x}(\lambda))^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad 0 \le \lambda \le 1, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}.$$

Jaminan keberadaan diberikan oleh teorema berikut: bila $\mathbf{F}$ terdiferensial kontinu di $\mathbb{R}^n$, $J(\mathbf{x})$ taksingular untuk semua $\mathbf{x}$, dan ada konstanta M dengan $\|J(\mathbf{x})^{-1}\| \le M$ untuk semua $\mathbf{x}$, maka untuk setiap $\mathbf{x}^{(0)}$ ada fungsi tunggal $\mathbf{x}(\lambda)$ yang memenuhi $\mathbf{G}(\lambda,\mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{0}$ pada $[0,1]$, terdiferensial kontinu, dan memenuhi persamaan diferensial di atas. Syarat yang cukup ketat ini tidak otomatis terpenuhi pada soal praktis, sehingga ketika memakai kontinuasi kita perlu mewaspadai titik tempat J singular di sepanjang lintasan.

Sebuah akibat menarik: karena $\mathbf{G}(\lambda,\mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{0}$, berlaku $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) = (1-\lambda)\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$. Residu menyusut secara linear menuju nol saat $\lambda \to 1$.

Persamaan diferensial itu diselesaikan secara numerik. Bagilah $[0,1]$ menjadi N bagian dengan $h = 1/N$, $\lambda_j = jh$, dan pakai metode Runge-Kutta orde empat pada sistem $\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x})$ dengan $\varphi(\mathbf{x}) = -J(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ (tidak bergantung eksplisit pada λ). Tiap $\mathbf{k}_m$ didapat dengan menyelesaikan sistem linear, misalnya $J(\mathbf{w}_j)\mathbf{k}_1 = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$, $J(\mathbf{w}_j + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2 = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$, dan seterusnya, lalu $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$. Satu langkah RK4 memerlukan empat sistem linear, jadi N langkah memerlukan $4N$ sistem, setara kerja sekitar $4N$ iterasi Newton. Dua pilihan penghematan: memakai metode orde rendah (metode Euler memerlukan satu sistem per langkah, metode titik tengah dua) atau mengurangi N. Perhatikan bahwa metode Euler dengan $N = 1$ persis satu iterasi Newton dari $\mathbf{x}^{(0)}$.

Kontinuasi dapat dipakai sendirian dan tidak menuntut tebakan awal yang bagus, tetapi biayanya besar. Karena itu sering lebih bijak memakai beberapa langkah kasar (mis. Euler dengan $N = 2$) untuk memperoleh tebakan awal yang cukup baik, lalu menyelesaikannya dengan Newton atau Broyden. Dibanding penurunan tercuram (Seksi 10.4), kontinuasi tidak terjebak pada minimum lokal palsu selama lintasannya terdefinisi baik. Varian lain (tidak dibahas rinci di sini) menelusuri lintasan dengan skema prediktor-korektor, yaitu langkah prediksi ODE yang kemudian dikoreksi oleh iterasi Newton pada $\mathbf{G}(\lambda_{j+1},\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Konsep kunci

Homotopi — Keluarga masalah $\mathbf{G}(\lambda,\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ yang menghubungkan masalah dengan solusi diketahui ($\lambda = 0$) dengan masalah sasaran $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($\lambda = 1$).

Web by: Steven Paulus Siahaan

Homotopi Newton sederhana — $\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\lambda - 1)\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$; di $\lambda = 0$ solusinya adalah $\mathbf{x}^{(0)}$ sendiri.

Lintasan solusi — Kurva $\{\mathbf{x}(\lambda) : 0 \le \lambda \le 1\}$ dengan $\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}(\lambda)) = \mathbf{0}$, dari $\mathbf{x}^{(0)}$ ke solusi $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(1)$.

Persamaan diferensial kontinuasi — $\mathbf{x}'(\lambda) = -J(\mathbf{x}(\lambda))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ dengan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$; hasil diferensiasi implisit.

Syarat keberadaan — $\mathbf{F} \in C^1$, J taksingular di mana-mana, dan $\|J^{-1}\| \le M$: dijamin lintasan tunggal yang terdiferensial kontinu.

Penyelesaian numerik ODE — Lintasan dihitung dengan Euler, titik tengah, atau Runge-Kutta orde empat; tiap evaluasi φ berarti satu sistem linear.

Biaya dan kegunaan — RK4 dengan N langkah memerlukan $4N$ sistem linear; metode ini tangguh terhadap tebakan awal yang buruk dan dapat memberi tebakan awal bagi Newton/Broyden.

Homotopi

$$\mathbf{G}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\lambda - 1)\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

Persamaan diferensial lintasan

$$\mathbf{x}'(\lambda) = -J(\mathbf{x}(\lambda))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$$

Residu sepanjang lintasan

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) = (1 - \lambda)\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

Langkah Euler

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j - h\,J(\mathbf{w}_j)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \qquad h = \tfrac{1}{N}$$

Runge-Kutta orde empat

$$J(\mathbf{w}_j)\mathbf{k}_1 = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad J(\mathbf{w}_j + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2 = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

$$J(\mathbf{w}_j + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_2)\mathbf{k}_3 = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad J(\mathbf{w}_j + \mathbf{k}_3)\mathbf{k}_4 = -h\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$$

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Algoritma: Kontinuasi dengan Runge-Kutta orde empat

1. Masukkan n, bilangan bulat $N > 0$, dan tebakan awal $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$. Set $h = 1/N$ dan $\mathbf{b} = -h\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ (tetap sepanjang perhitungan).
2. Untuk $j = 1, \ldots, N$ lakukan langkah 3-7.
3. Selesaikan $J(\mathbf{x})\mathbf{k}_1 = \mathbf{b}$.
4. Selesaikan $J(\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_1)\mathbf{k}_2 = \mathbf{b}$, lalu $J(\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{k}_2)\mathbf{k}_3 = \mathbf{b}$.
5. Selesaikan $J(\mathbf{x} + \mathbf{k}_3)\mathbf{k}_4 = \mathbf{b}$.
6. Perbarui $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \tfrac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$.

7. Setelah N langkah keluarkan $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}(1)$. Bila perlu, haluskan hasilnya dengan beberapa iterasi Newton.

Contoh 1: Kontinuasi untuk satu persamaan

Pandang $f(x) = x^3 + x - 3$ dengan $x_0 = 0$ dan homotopi $G(\lambda, x) = f(x) + (\lambda - 1)f(x_0)$. Tuliskan ODE-nya dan hitung hampiran akar dengan metode Euler dan RK4 untuk $N = 1, 2, 4$ (akar sebenarnya $1{,}213412$).

Penyelesaian.

$f(0) = -3$ dan $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$, jadi syarat teorema terpenuhi ($|1/f'| \leq 1$). ODE-nya adalah $x'(\lambda) = \frac{3}{3x^2+1}$ dengan $x(0) = 0$. Ini dapat dipecahkan: $(3x^2 + 1)\,dx = 3\,d\lambda$ memberi $x^3 + x = 3\lambda$, sehingga $f(x(\lambda)) = 3\lambda - 3 = (1 - \lambda)f(0)$, cocok dengan rumus residu.

Euler $N = 1$: $x = 0 + \frac{3}{1} = 3$ (satu langkah Newton). Euler $N = 2$: $x_1 = 0 + 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$, lalu $x_2 = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot \frac{3}{7{,}75} = 1{,}6935$. Euler $N = 4$: $1{,}3480$. RK4: $N = 1$: $1{,}5499$; $N = 2$: $1{,}2294$; $N = 4$: $1{,}2129$.

Galat terhadap $1{,}213412$: Euler $1{,}79;\ 0{,}48;\ 0{,}13$ (orde satu: turun lambat) dan RK4 $0{,}34;\ 0{,}016;\ 0{,}0005$ (turun jauh lebih cepat: orde empat). Karena itu RK4 dengan N kecil sudah memberi tebakan awal baik untuk Newton.

Contoh 2: Kontinuasi untuk sistem 2×2

Untuk $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $xy - 1 = 0$ (solusi $(1{,}931852;\ 0{,}517638)$) dengan $\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ 0)^t$, bandingkan Euler dan RK4.

Penyelesaian.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = (5;\ -1)^t$ dan Jacobi di $(3; 0)$ berbaris $(6;\ 0)$ dan $(0;\ 3)$. Euler dengan $N = 1$: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} - J^{-1}\mathbf{F} = (3 - \frac{5}{6};\ 0 + \frac{1}{3}) = (2{,}1667;\ 0{,}3333)^t$, galat $0{,}235$; ini langkah Newton. Euler: $N = 2$ memberi $(2{,}0849;\ 0{,}3924)$ (galat $0{,}153$), $N = 4$ memberi $(2{,}0245;\ 0{,}4396)$ (galat $0{,}093$).

RK4: $N = 1$ memberi $(1{,}93034;\ 0{,}51913)$ (galat $1{,}5 \times 10^{-3}$, memerlukan 4 sistem linear); $N = 2$ galat $3{,}5 \times 10^{-4}$ (8 sistem); $N = 4$ memberi $(1{,}93181;\ 0{,}51768)$ dengan galat $4{,}5 \times 10^{-5}$ (16 sistem). Residu $\|\mathbf{F}\|_\infty$ tinggal $1{,}3 \times 10^{-4}$ pada $N = 4$.

Satu langkah RK4 yang berbiaya empat sistem linear memberi hasil jauh lebih baik daripada empat langkah Euler (galat $0{,}093$): orde yang lebih tinggi lebih berharga daripada langkah yang lebih banyak.

Contoh 3: Kontinuasi sebagai penyedia tebakan awal

Pada soal 2×2 di atas, apa untungnya memakai Euler $N = 2$ lalu Newton dibanding Newton langsung dari $(3;\ 0)^t$?

Penyelesaian.

Dari titik awal Euler $N = 2$, $(2{,}0849;\ 0{,}3924)$, Newton memberi galat maksimum $1{,}2 \times 10^{-2}$, $9{,}1 \times 10^{-5}$, $5{,}9 \times 10^{-9}$, 1×10^{-16} pada empat iterasi; total biaya $2 + 4 = 6$ sistem linear. Newton langsung dari $(3;\ 0)$ pada soal ini juga konvergen, tetapi memerlukan lima atau enam iterasi (ukuran langkah $0{,}83;\ 0{,}21;\ 0{,}024;\ 3{,}9 \times 10^{-4};\ 1{,}1 \times 10^{-7}$), jadi pada soal semudah ini kontinuasi tidak menghemat banyak. Keuntungannya muncul pada soal yang tebakan awal Newton-nya terlalu jauh dan iterasinya menyimpang: beberapa langkah kontinuasi kasar yang murah dapat membawa tebakan ke daerah konvergensi Newton.

Kesalahan umum

• Menganggap lintasan $\mathbf{x}(\lambda)$ selalu ada dan tunggal. Jaminannya mensyaratkan J taksingular dengan $\|J^{-1}\|$ terbatas; di titik tempat J singular, lintasan bisa bercabang atau berbalik arah.

• Lupa bahwa $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ tetap (tidak diperbarui) di ruas kanan persamaan diferensial, hanya matriks J yang dievaluasi di titik antara.

• Memakai N terlalu kecil dengan Euler lalu mengira hasilnya sudah solusi. Euler dengan $N = 1$ hanya satu langkah Newton.

• Mengabaikan biaya: RK4 memerlukan $4N$ sistem linear, padahal Newton hanya satu per iterasi. Untuk tujuan memperoleh tebakan awal, metode orde rendah dengan N kecil sering sudah cukup.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) = (1 - \lambda)\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$? Apa makna geometrinya terhadap residu sepanjang lintasan?
2. Mengapa Euler dengan $N = 1$ sama dengan satu iterasi Newton? Apa implikasinya terhadap hubungan kontinuasi dan Newton?
3. Kapan lintasan solusi dapat berbalik arah terhadap λ (bukan fungsi tunggal dari λ), dan apa yang gagal pada teorema di situ?
4. Bandingkan kontinuasi dan penurunan tercuram sebagai penyedia tebakan awal: kelebihan dan biaya masing-masing.

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $f(x) = 2x + e^x - 5$, $x_0 = 0$: tuliskan ODE kontinuasi dan hitung hampiran Euler $N = 1$ dan $N = 2$ (akar sebenarnya $1{,}0587$).

Kunci: $f(0) = -4$, $f'(x) = 2 + e^x$, ODE $x' = \frac{4}{2 + e^x}$. $N = 1$: $x = \frac{4}{3} = 1{,}3333$. $N = 2$: $x_1 = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} = 0{,}6667$; $x_2 = 0{,}6667 + 0{,}5 \cdot \frac{4}{2 + e^{0{,}6667}} = 0{,}6667 + 0{,}5066 = 1{,}1733$. Galat $0{,}275$ dan $0{,}115$.

2. Untuk $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ linear dengan A taksingular, tunjukkan bahwa lintasan kontinuasi berupa garis lurus dan Euler dengan $N = 1$ sudah eksak.

Kunci: $J = A$ konstan, sehingga $\mathbf{x}' = -A^{-1}(A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b}) = A^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(0)}$ konstan. Jadi $\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{x}^{(0)} + \lambda(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(0)})$ dan satu langkah Euler ($h = 1$) memberi $\mathbf{x}^*$ tepat.

3. Berapa sistem linear yang diperlukan Euler, titik tengah, dan RK4 bila $N = 10$?

Kunci: Euler: 10 sistem (satu per langkah); titik tengah: 20; RK4: 40.

4. Untuk $\mathbf{x}^{(0)} = (3;\ 0)^t$ pada sistem lingkaran-hiperbola, berapa $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda))\|_\infty$ pada $\lambda = 0{,}8$ menurut rumus residu?

Kunci: $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = (5;\ -1)^t$ dengan norma tak hingga 5. Menurut $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\lambda)) = (1-\lambda)\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$, pada $\lambda = 0{,}8$ normanya $0{,}2 \cdot 5 = 1$.

Pesan Utama

Ingat

Newton cepat tetapi menuntut tebakan awal yang dekat; kombinasikan dengan penurunan tercuram atau kontinuasi untuk keandalan.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dibuat otomatis 07-11-2026.

Webby: Steven Paulus Siahaan