MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 11

Masalah Nilai Batas Persamaan Diferensial Biasa

Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations

Halaman buku 671 – 711 • 6 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Pada masalah nilai batas, syarat diberikan di dua ujung interval, sehingga tidak bisa 'dijalankan maju' seperti masalah nilai awal. Metode tembak (shooting) mengubahnya menjadi masalah nilai awal dengan tebakan kemiringan awal; untuk persamaan linear cukup dua penyelesaian, sedangkan kasus nonlinear memakai Newton pada kemiringan.

Metode beda hingga mengganti turunan dengan hampiran beda sehingga persamaan diferensial menjadi sistem aljabar (tridiagonal untuk kasus linear). Metode Rayleigh–Ritz memakai formulasi variasional dengan fungsi basis lokal sehingga menghasilkan sistem linear simetris definit positif.

Tujuan Pembelajaran

1. Menerapkan metode tembak linear dan nonlinear.
2. Menyusun sistem beda hingga untuk $y'' = py' + qy + r$.
3. Menjelaskan formulasi variasional Rayleigh–Ritz.
4. Membandingkan keunggulan tiap pendekatan.

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
11.1	The Linear Shooting Method	672	Teo. 11.1; Kor. 11.2; 2 contoh
11.2	The Shooting Method for Nonlinear Problems	678	1 contoh
11.3	Finite-Difference Methods for Linear Problems	684	Teo. 11.3; 2 contoh
11.4	Finite-Difference Methods for Nonlinear Problems	691	1 contoh
11.5	The Rayleigh-Ritz Method	696	Teo. 11.4
11.6	Survey of Methods and Software	711	–

Rumus dan Metode Kunci

Tembak linear

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}\, y_2(x)$$

Beda hingga untuk $y'' = py' + qy + r$

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q(x_i)w_i = -r(x_i)$$

Fungsional Rayleigh–Ritz

$$I[\phi] = \int_0^1 \left\{p(x)[\phi'(x)]^2 + q(x)[\phi(x)]^2 - 2f(x)\phi(x)\right\} dx$$

11.1 The Linear Shooting Method

Rujukan buku: halaman 672

Masalah nilai batas (BVP) orde dua berbentuk $y'' = f(x, y, y')$ untuk $a \le x \le b$ dengan syarat di kedua ujung, $y(a) = \alpha$ dan $y(b) = \beta$. Berbeda dengan masalah nilai awal, kedua syarat tidak diberikan di satu titik yang sama, sehingga kita tidak bisa langsung memulai integrasi numerik dari satu ujung. Bahkan keberadaan dan ketunggalan solusi tidak otomatis: BVP bisa tidak punya solusi atau punya tak hingga banyak. Teorema 11.1 memberi syarat cukup: jika f, f_y, dan $f_{y'}$ kontinu pada himpunan D, yaitu himpunan semua (x, y, y') dengan $a \le x \le b$ dan y, y' bilangan real sembarang, $f_y > 0$ di D, dan ada konstanta M dengan $|f_{y'}| \le M$ di D, maka BVP punya tepat satu solusi.

Untuk persamaan linear, $f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$, teorema itu menyusut menjadi Akibat 11.2: bila p, q, r kontinu pada $[a, b]$ dan $q(x) > 0$ di seluruh $[a, b]$, maka BVP linear $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ memiliki solusi tunggal. Pada kasus linear inilah metode tembakan (shooting) paling sederhana. Idenya: gantikan satu BVP dengan dua masalah nilai awal yang bisa diselesaikan dengan metode Bab 5 seperti Runge-Kutta orde empat.

Definisikan y_1 sebagai solusi masalah nilai awal lengkap dan y_2 sebagai solusi masalah homogennya:

$$y_1'' = py_1' + qy_1 + r, \quad y_1(a) = \alpha,\ y_1'(a) = 0$$
$$y_2'' = py_2' + qy_2, \quad y_2(a) = 0,\ y_2'(a) = 1$$

Jika $y_2(b) \neq 0$, fungsi $y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x)$ adalah solusi BVP. Pembuktiannya hanya dua pemeriksaan. Pertama, y memenuhi persamaan diferensial karena ruas kanan linear dalam (y, y') dan suku r hanya muncul sekali (dari y_1), sedangkan y_2 memenuhi versi homogen. Kedua, $y(a) = \alpha + 0 = \alpha$ dan $y(b) = y_1(b) + (\beta - y_1(b)) = \beta$. Dengan kata lain, solusi dibangun sebagai satu solusi khusus ditambah kelipatan solusi homogen, dan kelipatannya dipilih agar target β tepat terkena dalam satu tembakan.

Mengapa $y_2(b) \neq 0$ aman? Bila $y_2(b) = 0$, maka y_2 yang tidak identik nol akan menjadi solusi tak trivial BVP homogen ($y(a) = y(b) = 0$). Padahal pada syarat Akibat 11.2 solusi BVP itu tunggal, yaitu fungsi nol, sehingga kontradiksi. Jadi di bawah syarat akibat tersebut pembagian dengan $y_2(b)$ selalu sah. Di luar syarat itu metode kadang tetap berjalan (misalnya $q < 0$ tetapi $y_2(b) \neq 0$), namun jaminan teoretisnya hilang, dan jika $y_2(b) = 0$ maka BVP tidak punya solusi atau punya tak hingga banyak.

Dalam praktik, kedua masalah nilai awal ditulis sebagai sistem orde satu dalam (y, y') dan diintegrasikan bersama dengan langkah $h = (b - a)/N$. Keluarannya $w_{1,i} \approx y(x_i)$ dan $w_{2,i} \approx y'(x_i)$. Galat total ditentukan oleh metode IVP yang dipakai, sehingga RK4 memberi galat $O(h^4)$. Kekuatan metode ini adalah kesederhanaan dan akurasi tinggi bila solusi homogen tidak tumbuh cepat. Kelemahannya adalah ketidakstabilan: jika solusi homogen tumbuh eksponensial dari a ke b, $y_2(b)$ sangat besar dan selisih $\beta - y_1(b)$ dihitung dengan kehilangan digit signifikan. Pada kasus semacam itu metode beda hingga (Seksi 11.3) lebih tahan. Untuk persamaan nonlinear, satu tembakan tidak cukup dan diperlukan iterasi, yang dibahas pada Seksi 11.2.

Konsep kunci

Masalah nilai batas (BVP) — Persamaan diferensial dengan syarat di dua titik berbeda, mis. $y(a) = \alpha$ dan $y(b) = \beta$. Solusinya tidak otomatis ada atau tunggal.

Teorema 11.1 (ada dan tunggal) — Jika $f, f_y, f_{y'}$ kontinu pada D, $f_y > 0$, dan $|f_{y'}| \le M$ pada D, maka BVP $y'' = f(x, y, y')$ memiliki solusi tunggal.

Akibat 11.2 (kasus linear) — Untuk $y'' = py' + qy + r$: bila p, q, r kontinu pada $[a, b]$ dan $q > 0$ di sana, BVP punya solusi tunggal.

Dua masalah nilai awal — y_1 membawa suku r dan nilai α (dengan $y_1'(a) = 0$); y_2 adalah solusi homogen dengan $y_2(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$.

Superposisi — Karena persamaan linear, $y_1 + \lambda y_2$ tetap memenuhi persamaan untuk setiap λ. Nilai λ dipilih agar $y(b) = \beta$.

Kemiringan awal yang benar — Solusi BVP memenuhi $y'(a) = \lambda = \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}$. Ini 'sudut tembak' yang tepat sasaran.

Ketidakstabilan — Bila solusi homogen tumbuh cepat, $y_2(b)$ besar dan pengurangan $\beta - y_1(b)$ merusak ketelitian. Beda hingga sering lebih stabil.

BVP linear orde dua

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

IVP pertama

$$y_1'' = p\,y_1' + q\,y_1 + r, \quad y_1(a) = \alpha,\ y_1'(a) = 0$$

IVP kedua (homogen)

$$y_2'' = p\,y_2' + q\,y_2, \quad y_2(a) = 0,\ y_2'(a) = 1$$

Kombinasi linear

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}\,y_2(x)$$

Sistem orde satu untuk RK4

$$u_1' = u_2$$

$$u_2' = p(x)u_2 + q(x)u_1 + r(x)$$

Algoritma: Penembakan linear (Linear Shooting) dengan RK4

1. Masukkan a, b, α, β dan jumlah subselang N; hitung $h = (b - a)/N$. Periksa bahwa p, q, r kontinu dan sebaiknya $q > 0$.
2. Tulis IVP pertama sebagai sistem $(u_1, u_2) = (y_1, y_1')$ dengan $u_1(a) = \alpha$, $u_2(a) = 0$, dan IVP kedua sebagai $(v_1, v_2) = (y_2, y_2')$ dengan $v_1(a) = 0$, $v_2(a) = 1$ (suku r dibuang pada sistem kedua).
3. Untuk $i = 0, \ldots, N - 1$, majukan kedua sistem satu langkah RK4 berukuran h dari $x_i = a + ih$.
4. Hitung $\lambda = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}}$. Bila $v_{1,N}$ (hampir) nol, laporkan bahwa metode tidak dapat dipakai.
5. Untuk $i = 0, \ldots, N$ keluarkan $w_{1,i} = u_{1,i} + \lambda v_{1,i}$ dan $w_{2,i} = u_{2,i} + \lambda v_{2,i}$; maka $w_{1,0} = \alpha$ dan $w_{2,0} = \lambda$.

Contoh 1: Memeriksa syarat keberadaan dan ketunggalan

Tunjukkan bahwa BVP $y'' = x^2 y' + (1+e^x)y + \cos x$ pada $0 \le x \le 2$, $y(0) = 1$, $y(2) = -1$ memiliki solusi tunggal.

Penyelesaian.

Persamaan ini linear dengan $p(x) = x^2$, $q(x) = 1 + e^x$, dan $r(x) = \cos x$. Ketiganya kontinu pada $[0, 2]$. Selain itu $q(x) = 1 + e^x \ge 2 > 0$ untuk semua x. Syarat Akibat 11.2 terpenuhi, sehingga BVP punya tepat satu solusi. Perhatikan bahwa kita tidak perlu mencari solusinya untuk menyimpulkan hal ini.

Contoh 2: Penembakan linear untuk $y'' = y + x$

Selesaikan $y'' = y + x$ pada $[0, 1]$ dengan $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ memakai penembakan linear. Di sini $p = 0$, $q = 1$, $r = x$. Bandingkan satu hasil RK4 dengan $N = 4$ terhadap solusi eksaknya.

Penyelesaian.

IVP pertama: $y_1'' = y_1 + x$, $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$. Solusi umum $A\cosh x + B\sinh x - x$; syarat awal memberi $A = 1$ dan $B = 1$, sehingga $y_1 = e^x - x$. IVP kedua: $y_2'' = y_2$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, sehingga $y_2 = \sinh x$.

Nilai di ujung kanan: $y_1(1) = e - 1 \approx 1{,}7183$ dan $y_2(1) = \sinh 1 \approx 1{,}1752$. Jadi

$$\lambda = \frac{\beta - y_1(1)}{y_2(1)} = \frac{2 - (e-1)}{\sinh 1} = \frac{3 - e}{\sinh 1} \approx 0{,}2397$$

Solusi BVP adalah $y(x) = e^x - x + \lambda \sinh x$, dengan kemiringan awal $y'(0) = \lambda$. Di $x = 0{,}5$: $y_1 = e^{0{,}5} - 0{,}5 \approx 1{,}1487$ dan $y_2 = \sinh 0{,}5 \approx 0{,}5211$, sehingga $y(0{,}5) \approx 1{,}2736$.

Dengan RK4, $N = 4$ ($h = 0{,}25$), diperoleh $w_{1,2} \approx 1{,}273648$ pada $x = 0{,}5$, sedangkan nilai eksak $1{,}273638$; galatnya sekitar $1{,}06 \times 10^{-5}$. Kemiringan awal yang dihitung adalah $0{,}239789$ (eksak $0{,}239719$).

Contoh 3: Ketika penembakan linear gagal

Pandang $y'' = -y$ pada $[0, \pi]$ dengan $y(0) = 0$ dan $y(\pi) = 1$. Mengapa penembakan linear tidak dapat dipakai?

Penyelesaian.

Di sini $p = 0$, $q = -1 < 0$, sehingga syarat Akibat 11.2 tidak terpenuhi. Hitung $y_1 \equiv 0$ (karena $r = 0$ dan $\alpha = 0$) dan $y_2 = \sin x$. Maka $y_2(\pi) = \sin \pi = 0$ dan $\lambda = \frac{1 - 0}{0}$ tak terdefinisi. Ini bukan kelemahan numerik semata: setiap solusi persamaan ini yang nol di $x = 0$ berbentuk $C\sin x$ dan bernilai 0 di $x = \pi$, jadi syarat $y(\pi) = 1$ mustahil dipenuhi, dan BVP ini memang tidak punya solusi. Bila syarat kanannya $y(\pi) = 0$, solusinya justru tak hingga banyak ($C\sin x$ untuk sebarang C).

Kesalahan umum

• Menganggap setiap BVP pasti punya solusi tunggal. Contoh $y'' = -y$ pada $[0, \pi]$ menunjukkan bahwa tanda q yang salah dapat membuat solusi tidak ada atau tidak tunggal.

• Memakai $y_2'(a) = 1$ tetapi lupa memakai $y_2(a) = 0$ dan membuang suku r pada IVP kedua. IVP kedua harus homogen; jika r ikut, kombinasi $y_1 + \lambda y_2$ tidak lagi memenuhi persamaan.

• Mengira λ adalah nilai $y(b)$. Sebenarnya $\lambda = \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}$ adalah kelipatan solusi homogen, sekaligus nilai $y'(a)$ karena $y_1'(a) = 0$ dan $y_2'(a) = 1$.

• Menyamakan 'metode stabil' dengan 'RK4 berorde empat'. Orde menyatakan laju galat terhadap h, bukan sensitivitas terhadap pertumbuhan solusi homogen; yang kedua dapat merusak hasil walau h kecil.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa metode ini hanya memerlukan satu 'tembakan' (dua IVP) untuk persamaan linear? Sifat apa dari persamaan yang dipakai?
2. Mengapa $y_2(b) = 0$ tidak mungkin terjadi bila $q > 0$? Hubungkan dengan ketunggalan solusi BVP homogen.
3. Jika solusi homogen y_2 tumbuh seperti e^{20x} pada $[0, 5]$, apa yang terjadi pada ketelitian λ? Bagaimana ide beda hingga menghindarinya?
4. Mengapa mengambil $y_1'(a) = 0$ dan $y_2'(a) = 1$ hanyalah pilihan kenyamanan? Kombinasi pilihan lain apa yang akan bekerja asalkan $y_2(a) = 0$ dan $y_2'(a) \neq 0$?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Selesaikan $y'' = 4y$ pada $[0, 1]$ dengan $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ secara analitik lewat penembakan linear: tentukan y_1, y_2, λ, dan $y'(0)$.

Kunci: $r = 0$ dan $\alpha = 0$ sehingga $y_1 \equiv 0$. $y_2 = \frac{\sinh 2x}{2}$ sehingga $y_2(1) = \frac{\sinh 2}{2} \approx 1{,}8134$. $\lambda = \frac{1-0}{y_2(1)} = \frac{2}{\sinh 2} \approx 0{,}5514$, dan $y(x) = \frac{\sinh 2x}{\sinh 2}$; $y'(0) = \lambda$.

2. Untuk $y'' = -y$ pada $[0, \pi/2]$ dengan $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$: apakah syarat Akibat 11.2 terpenuhi? Apakah penembakan linear tetap dapat dipakai? Tentukan solusinya.

Kunci: Tidak, karena $q = -1 < 0$. Namun $y_1 \equiv 0$, $y_2 = \sin x$, $y_2(\pi/2) = 1 \neq 0$, jadi metode berjalan: $\lambda = 1$ dan $y = \sin x$. Syarat akibat hanya cukup, bukan perlu.

3. Apakah $y'' = e^x y' + (x - 2)y + x$ pada $[3, 5]$ dengan syarat batas sebarang dijamin punya solusi tunggal oleh Akibat 11.2?

Kunci: Ya. $p = e^x$, $q = x - 2$, $r = x$ kontinu pada $[3, 5]$ dan $q(x) \geq 1 > 0$ di sana.

4. Pada suatu penembakan linear dengan $\alpha = 1$, $\beta = 5$ diperoleh $y_1(b) = 3$ dan $y_2(b) = 2$. Tentukan λ, $y'(a)$, dan rumus $y(x)$ dalam y_1, y_2.

Kunci: $\lambda = \frac{5-3}{2} = 1$. Karena $y_1'(a) = 0$ dan $y_2'(a) = 1$, maka $y'(a) = 1$. Solusinya $y = y_1 + y_2$; cek $y(b) = 3 + 2 = 5$.

11.2 The Shooting Method for Nonlinear Problems

Rujukan buku: halaman 678

Pada masalah nilai batas nonlinear $y'' = f(x, y, y')$ dengan $y(a) = \alpha$ dan $y(b) = \beta$, solusi tidak lagi dapat dirangkai sebagai kombinasi linear dua solusi masalah nilai awal. Metode tembakan nonlinear mengganti satu BVP dengan keluarga masalah nilai awal yang berparameter t, yaitu kemiringan awal:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha,\ y'(a) = t$$

Solusi IVP itu ditulis $y(x, t)$. Tujuannya mencari t sedemikian sehingga tembakan mengenai sasaran di ujung kanan, yakni $y(b, t) = \beta$. Analogi balistiknya jelas: t adalah sudut peluncuran dan β adalah target. Bila tembakan meleset, sudut dikoreksi dan peluru ditembakkan lagi.

Dengan demikian masalahnya berubah menjadi persamaan nonlinear satu variabel $g(t) = y(b, t) - \beta = 0$, dan setiap evaluasi g berarti menyelesaikan satu IVP secara numerik (misalnya dengan RK4). Persamaan ini dapat diselesaikan dengan metode akar dari Bab 2. Metode secant memerlukan dua tebakan awal t_0, t_1 dan satu IVP per iterasi: $t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b, t_{k-1}) - \beta)(t_{k-1} - t_{k-2})}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}$. Metode Newton hanya butuh satu tebakan awal, tetapi memerlukan turunan $\frac{dy}{dt}(b, t)$ yang tidak tersedia secara eksplisit.

Turunan itu dapat diperoleh dari persamaan variasi. Turunkan IVP terhadap t (dengan x dan t bebas), lalu tulis $z(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$. Aturan rantai menghasilkan masalah nilai awal linear baru

$$z'' = f_y(x, y, y')\, z + f_{y'}(x, y, y')\, z', \quad z(a) = 0,\ z'(a) = 1$$

yang diselesaikan bersamaan dengan IVP untuk y. Syarat awalnya berasal dari $y(a, t) = \alpha$ (tidak bergantung t) dan $y'(a, t) = t$. Setelah $z(b, t_{k-1})$ didapat, iterasi Newton berbentuk $t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}$. Jadi tiap iterasi Newton memerlukan satu sistem orde satu berdimensi empat (y, y', z, z'), yaitu dua IVP, sedangkan secant satu IVP per iterasi tetapi konvergen lebih lambat (orde sekitar 1,62 berbanding 2).

Syarat keberadaan solusi tetap Teorema 11.1 (di antaranya $f_y > 0$ dan $f_{y'}$ terbatas). Syarat itu menjamin BVP punya solusi tunggal, tetapi tidak menjamin tiap tembakan sepanjang iterasi terdefinisi: untuk t yang jauh dari nilai benar, solusi IVP bisa meledak (menuju tak hingga) sebelum mencapai $x = b$, sehingga $y(b, t)$ tidak ada. Karena itu tebakan awal harus wajar, misalnya kemiringan garis lurus $t_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, dan jumlah iterasi dibatasi.

Satu fakta berguna: bila persamaan linear, maka $y(b, t)$ fungsi afin dalam t (garis lurus), sehingga secant menemukan t yang tepat dalam satu langkah, dan Newton pun satu langkah. Ini menjelaskan mengapa penembakan linear (Seksi 11.1) cukup satu tembakan. Pada masalah nonlinear, kekuatan metode ini adalah keakuratan tinggi karena memakai integrator IVP berorde tinggi. Kelemahannya adalah sensitivitas: perubahan kecil pada t dapat menghasilkan perubahan besar pada $y(b, t)$ sehingga masalah $g(t) = 0$ berkondisi buruk. Seksi 11.4 memberi alternatif beda hingga yang lebih stabil namun lebih berat.

Konsep kunci

Parameter tembakan t — Kemiringan awal $y'(a) = t$. Setiap nilai t menghasilkan satu IVP dan satu lintasan $y(x, t)$ yang berangkat dari (a, α).

Fungsi sasaran — $g(t) = y(b, t) - \beta$. Akar $g(t) = 0$ adalah kemiringan awal yang membuat lintasan tepat mengenai (b, β).

Web by: Steven Paulus Siahaan

Penembakan dengan secant — Memakai dua tebakan t_0, t_1 dan satu IVP per iterasi; tidak memerlukan turunan, tetapi konvergensi superlinear (orde $\approx 1{,}62$).

Persamaan variasi — IVP untuk $z = \partial y/\partial t$: $z'' = f_y z + f_{y'} z'$, $z(a) = 0$, $z'(a) = 1$. Dipakai untuk memperoleh $\frac{dy}{dt}(b,t) = z(b,t)$ pada metode Newton.

Penembakan dengan Newton — $t_k = t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1}) - \beta}{z(b,t_{k-1})}$; konvergensi kuadratik bila tebakan awal cukup dekat, dengan dua IVP per iterasi.

Tebakan awal — Biasanya $t_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$. Tebakan buruk dapat membuat IVP meledak atau iterasi tidak konvergen.

Kasus linear — Bila persamaan linear, $y(b,t)$ afin dalam t sehingga secant tepat dalam satu langkah.

IVP berparameter

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha,\ y'(a) = t$$

Persamaan sasaran

$$y(b,t) - \beta = 0$$

Iterasi secant

$$t_k = t_{k-1} - \frac{(y(b,t_{k-1}) - \beta)(t_{k-1} - t_{k-2})}{y(b,t_{k-1}) - y(b,t_{k-2})}$$

Persamaan variasi

$$z'' = f_y(x,y,y')\,z + f_{y'}(x,y,y')\,z', \quad z(a) = 0,\ z'(a) = 1$$

Iterasi Newton

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1}) - \beta}{z(b,t_{k-1})}$$

Algoritma: Penembakan nonlinear dengan metode Newton

1. Masukkan a, b, α, β, jumlah subselang N, toleransi TOL, dan iterasi maksimum M. Set $h = \frac{b-a}{N}$ dan tebakan $t = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$.
2. Untuk $k = 1, \ldots, M$: selesaikan dengan RK4 sistem orde satu $y' = v$, $v' = f(x, y, v)$, $z' = s$, $s' = f_y\, z + f_{y'}\, s$ dengan nilai awal $y(a) = \alpha$, $v(a) = t$, $z(a) = 0$, $s(a) = 1$ dari $x = a$ sampai $x = b$.
3. Jika $|y(b) - \beta| \le \mathrm{TOL}$, keluarkan hasil (x_i, y_i, v_i) dan berhenti.
4. Jika tidak, perbarui $t \leftarrow t - \frac{y(b) - \beta}{z(b)}$ dan ulangi.
5. Bila M iterasi habis, laporkan bahwa batas iterasi terlampaui (coba tebakan awal lain atau N lebih besar). Versi secant mengganti langkah 2 dan 4 dengan satu IVP per iterasi dan rumus secant.

Contoh 1: Penembakan dengan secant

Selesaikan $y'' = \frac{3}{2}y^2$ pada $[0,1]$ dengan $y(0)=4$ dan $y(1)=1$ memakai secant dengan $t_0=-6$ dan $t_1=-9$. (Solusi eksak $y=\frac{4}{(1+x)^2}$, sehingga t yang benar adalah $y'(0)=-8$.)

Penyelesaian.

Di sini $f=\frac{3}{2}y^2$ sehingga $f_y=3y$ dan $f_{y'}=0$. Tiap tembakan diselesaikan dengan integrator IVP berakurasi tinggi, dan didapat

$t_0=-6:\ y(1,t_0)\approx 7{,}2149$; $t_1=-9:\ y(1,t_1)\approx -0{,}9581$ (meleset di dua sisi sasaran 1).

Rumus secant memberi $t_2=-9-\frac{(y(1,t_1)-1)(-9+6)}{y(1,t_1)-y(1,t_0)}\approx -8{,}2812$ dengan $y(1,t_2)\approx 0{,}3884$. Berikutnya $t_3\approx -7{,}9548$ ($y(1,t_3)\approx 1{,}1033$), dan $t_4\approx -8{,}001932$ ($y(1,t_4)\approx 0{,}995619$).

Iterasi menuju $t=-8$ dengan selisih terhadap sasaran menyusut cepat. Perhatikan bahwa kita mendekati sasaran dari kedua sisi, ciri khas secant.

Contoh 2: Penembakan dengan Newton dan persamaan variasi

Untuk BVP yang sama, jalankan metode Newton dari $t_0=-6$.

Penyelesaian.

Karena $f_y=3y$ dan $f_{y'}=0$, persamaan variasi adalah $z''=3y\,z$ dengan $z(0)=0$, $z'(0)=1$. Diselesaikan bersama $y''=\frac{3}{2}y^2$, $y(0)=4$, $y'(0)=t_k$.

Iterasi 1: $t_0=-6$, $y(1,t_0)\approx 7{,}2149$, $z(1,t_0)\approx 4{,}1379$, sehingga $t_1=-6-\frac{6{,}2149}{4{,}1379}\approx -7{,}5019$.

Iterasi 2: $y(1,t_1)\approx 2{,}2182$, $z(1,t_1)\approx 2{,}6329$, sehingga $t_2\approx -7{,}9646$.

Iterasi 3: $y(1,t_2)\approx 1{,}0806$, $t_3\approx -7{,}999813$; iterasi 4 memberi $t_4\approx -7{,}999999995$. Selisih terhadap -8 turun kira-kira $0{,}5\to 0{,}035\to 2\times10^{-4}\to 6\times10^{-9}$, yaitu pola kuadratik: banyak digit benar berlipat dua tiap iterasi.

Contoh 3: Kasus linear: satu langkah secant

Untuk $y''=y$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, tunjukkan bahwa secant dengan $t_0=0$ dan $t_1=1$ langsung memberi t_2 yang benar.

Penyelesaian.

IVP $y''=y$, $y(0)=0$, $y'(0)=t$ memiliki solusi $y(x,t)=t\sinh x$, sehingga $y(1,t)=t\sinh 1$ adalah fungsi linear dalam t. Maka $y(1,0)=0$ dan $y(1,1)=\sinh 1\approx 1{,}1752$. Secant: $t_2=1-\frac{(\sinh 1-1)(1-0)}{\sinh 1-0}=\frac{1}{\sinh 1}\approx 0{,}8509$. Tepat nilai yang menyelesaikan $t\sinh 1=1$, sehingga solusi BVP adalah $y=\frac{\sinh x}{\sinh 1}$.

Kesalahan umum

• Menganggap tembakan dari t sembarang pasti terdefinisi. Untuk persamaan nonlinear solusi IVP dapat meledak sebelum mencapai $x = b$ (mis. $y'' = y^2$ dengan $y(0)$ dan $y'(0)$ besar dan positif), sehingga $y(b, t)$ tidak ada.

• Mengganti $z(b, t)$ dengan $y(b, t)$ pada rumus Newton, atau lupa nilai awal $z(a) = 0$, $z'(a) = 1$. Persamaan variasi memakai syarat awal berbeda dari IVP utama.

• Menulis persamaan variasi dengan f_x. Karena x dan t bebas, $\partial x/\partial t = 0$ dan suku f_x lenyap; yang muncul hanya $f_y\, z + f_{y'}\, z'$.

• Menyimpulkan bahwa kondisi Teorema 11.1 menjamin konvergensi Newton/secant dari tebakan apa pun. Teorema hanya menjamin solusi BVP ada dan tunggal; iterasi untuk t tetap memerlukan tebakan awal yang wajar.

Pertanyaan diskusi

1. Bandingkan biaya per iterasi secant dan Newton (jumlah IVP yang diselesaikan) dengan laju konvergensinya. Kapan masing-masing lebih menguntungkan?
2. Turunkan sendiri persamaan variasi untuk $z = \partial y/\partial t$ dengan menurunkan IVP terhadap t. Mengapa urutan turunan terhadap x dan t boleh ditukar?
3. Mengapa pada persamaan linear $y(b, t)$ afin dalam t? Apa akibatnya bagi secant dan Newton?
4. Mengapa masalah $g(t) = 0$ dapat berkondisi buruk walaupun BVP-nya baik? Hubungkan dengan pertumbuhan solusi IVP terhadap t.

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Tulis persamaan variasi untuk $z = \partial y/\partial t$ pada $f(x, y, y') = y\, e^{y'}$.

Kunci: $f_y = e^{y'}$ dan $f_{y'} = y\, e^{y'}$. Maka $z'' = e^{y'} z + y\, e^{y'} z'$, $z(a) = 0$, $z'(a) = 1$.

2. Pada suatu tembakan dengan $t_0 = -4$ diperoleh $y(b, t_0) = 2{,}5$ dan $z(b, t_0) = 3$, sedangkan $\beta = 1$. Hitung t_1 dengan Newton.

Kunci: $t_1 = -4 - \frac{2{,}5 - 1}{3} = -4 - 0{,}5 = -4{,}5$.

3. Dua tembakan memberi $y(b, 1) = 0{,}2$ dan $y(b, 2) = 0{,}8$ dengan $\beta = 1$. Hitung t_2 dengan secant.

Kunci: $t_2 = 2 - \frac{(0{,}8 - 1)(2 - 1)}{0{,}8 - 0{,}2} = 2 + \frac{0{,}2}{0{,}6} \approx 2{,}3333$.

4. Mengapa pada BVP linear secant dengan dua tebakan sembarang (yang memberi $y(b, t_0) \neq y(b, t_1)$) selalu menemukan t benar dalam satu langkah?

Kunci: Pada persamaan linear $y(b, t) = y_1(b) + t\, y_2(b)$ afin dalam t. Secant menarik garis lewat dua titik pada grafik yang sudah berupa garis lurus, sehingga perpotongannya dengan β tepat akar dari g.

11.3 Finite-Difference Methods for Linear Problems

Rujukan buku: halaman 684

Metode tembak untuk soal nilai batas (Seksi 11.1 dan 11.2) mengubah soal nilai batas menjadi soal nilai awal, lalu mengintegrasikannya. Cara ini bisa rapuh: bila solusi masalah nilai awal tumbuh cepat, galat kecil di titik awal terbesar sepanjang selang dan hasilnya tidak stabil. Metode beda hingga (finite difference) menempuh jalan lain. Seluruh selang $[a, b]$ ditangani sekaligus: turunan di persamaan diferensial diganti dengan hasil bagi beda, dan hasilnya adalah sistem persamaan aljabar untuk nilai hampiran di semua titik simpul. Harganya, untuk ketelitian yang sama biasanya dibutuhkan lebih banyak hitungan daripada tembak berbasis Runge-Kutta orde tinggi.

Soal yang ditinjau adalah soal nilai batas linear orde dua

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

Pilih bilangan bulat $N > 0$ dan bagi $[a, b]$ menjadi $N+1$ subselang sama panjang dengan lebar $h = \frac{b-a}{N+1}$, sehingga titik simpulnya $x_i = a + ih$ untuk $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Nilai batas $w_0 = \alpha$ dan $w_{N+1} = \beta$ sudah diketahui, sedangkan $w_1, \ldots, w_N$ adalah N bilangan yang dicari sebagai hampiran $y(x_1), \ldots, y(x_N)$. Dengan memasang persamaan diferensial di setiap simpul dalam, kita memperoleh N persamaan untuk N bilangan tak diketahui.

Penurunan rumus bedanya memakai deret Taylor. Misalkan $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Menjumlahkan ekspansi Taylor $y(x_i + h)$ dan $y(x_i - h)$ menghilangkan suku-suku ganjil, dan setelah diselesaikan untuk turunan kedua diperoleh beda terpusat

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i)$$

Untuk turunan pertama, beda terpusat memberi

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i)$$

Keduanya berorde $O(h^2)$. Bila suku galat dibuang dan kedua hampiran dimasukkan ke persamaan diferensial di x_i, maka untuk $i = 1, \ldots, N$ diperoleh

$$\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\,\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q(x_i)\,w_i = -r(x_i)$$

Dikalikan h^2 dan dikelompokkan menurut w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, persamaan ini menjadi $-\big(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\big)w_{i-1} + \big(2 + h^2 q(x_i)\big)w_i - \big(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\big)w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$. Karena setiap persamaan hanya melibatkan tiga simpul bertetangga, matriks koefisien A berukuran $N \times N$ berbentuk tridiagonal: diagonal utamanya $2 + h^2 q(x_i)$, diagonal atasnya $-1 + \frac{h}{2}p(x_i)$, dan diagonal bawahnya $-1 - \frac{h}{2}p(x_i)$. Ruas kanan berisi $-h^2 r(x_i)$, ditambah kontribusi nilai batas pada persamaan pertama, $\big(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\big)\alpha$, dan pada persamaan terakhir, $\big(1 - \frac{h}{2}p(x_N)\big)\beta$.

Hasil teoretis utamanya: bila p, q, r kontinu pada $[a, b]$, $q(x) \ge 0$ di seluruh selang, dan $h < \frac{2}{L}$ dengan $L = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$, maka sistem tridiagonal ini mempunyai solusi tunggal. Syarat $h < 2/L$ menjamin tanda elemen di luar diagonal tidak berubah sehingga matriks dominan diagonal secara baris. Perhatikan bahwa jaminan ini hanya soal keberadaan solusi sistem. Orde galat $O(h^2)$ baru berlaku bila solusi sebenarnya memiliki turunan keempat kontinu, dan itu tidak otomatis dijamin oleh syarat tadi. Karena A tridiagonal, sistem dapat diselesaikan dengan faktorisasi Crout (eliminasi Gauss khusus tridiagonal) dalam $O(N)$ operasi, sehingga memperhalus mesh tidak terlalu mahal.

Metode ini hanya berorde dua, jadi untuk ketelitian tinggi ada dua jalan. Jalan pertama adalah memakai beda yang lebih tinggi ordenya, tetapi rumus itu membutuhkan simpul $x_{i \pm 2}$ sehingga matriks tidak lagi tridiagonal dan ada kesulitan di dekat ujung selang. Jalan

Web by: Steven Paulus Siahaan

kedua lebih praktis: perkecil h dan terapkan ekstrapolasi Richardson. Galat metode ini dapat dinyatakan sebagai deret dalam pangkat genap $h^2, h^4, \ldots$ dengan koefisien yang tidak bergantung pada h (asalkan solusi cukup mulus), sehingga ekstrapolasi $\frac{4w_i(h/2) - w_i(h)}{3}$ menaikkan orde menjadi $O(h^4)$ tanpa menyentuh struktur tridiagonal. Dengan tiga nilai h dapat dilakukan ekstrapolasi bertingkat. Seksi ini menjadi dasar Seksi 11.4, tempat sistemnya menjadi tak linear dan diselesaikan dengan metode Newton.

Konsep kunci

Beda terpusat — Hampiran $y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ dan $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$; keduanya memiliki galat pemotongan $O(h^2)$ asalkan y cukup mulus.

Titik simpul dan h — Selang dibagi $N+1$ bagian sama panjang, $h = \frac{b-a}{N+1}$, sehingga ada N simpul dalam dan N bilangan tak diketahui $w_1, \ldots, w_N$.

Sistem tridiagonal — Tiap persamaan hanya memuat w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, jadi A tridiagonal dan dapat diselesaikan dalam $O(N)$ operasi dengan algoritma Crout/Thomas.

Syarat keberadaan solusi — Jika p, q, r kontinu, $q \geq 0$ pada $[a, b]$, dan $h < 2/L$ dengan $L = \max|p|$, sistem punya solusi tunggal.

Peran nilai batas — $w_0 = \alpha$ dan $w_{N+1} = \beta$ tidak menjadi bilangan tak diketahui; kontribusinya dipindahkan ke ruas kanan persamaan pertama dan terakhir.

Ekstrapolasi Richardson — Galat berbentuk $c_1 h^2 + c_2 h^4 + \cdots$, sehingga $\frac{4w(h/2) - w(h)}{3}$ berorde $O(h^4)$ pada simpul yang dipakai bersama.

Kestabilan lebih baik — Dibanding metode tembak, metode beda hingga tidak mengalami penguatan galat eksponensial dari titik awal, dengan imbalan hitungan lebih banyak untuk akurasi yang sama.

Beda terpusat turunan kedua

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i)$$

Beda terpusat turunan pertama

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i)$$

Persamaan beda di simpul x_i

$$-\left(1 + \tfrac{h}{2}p(x_i)\right) w_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right) w_i - \left(1 - \tfrac{h}{2}p(x_i)\right) w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

Elemen matriks tridiagonal A

$$a_{ii} = 2 + h^2 q(x_i)$$

$$a_{i,\,i+1} = -1 + \tfrac{h}{2}p(x_i)$$

$$a_{i,\,i-1} = -1 - \tfrac{h}{2}p(x_i)$$

Syarat langkah

$$q(x) \geq 0 \text{ pada } [a, b], \qquad h < \tfrac{2}{L}, \quad L = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|$$

Ekstrapolasi pertama

$$\mathrm{Ext}_i = \frac{4w_i(h/2) - w_i(h)}{3}$$

Algoritma: Beda hingga linear

1. Masukkan a, b, α, β dan bilangan bulat $N \geq 2$. Hitung $h = \frac{b-a}{N+1}$ dan simpul $x_i = a + ih$.
2. Untuk $i = 1, \ldots, N$ hitung $a_i = 2 + h^2 q(x_i)$ dan $d_i = -h^2 r(x_i)$; untuk $i < N$ hitung $b_i = -1 + \frac{h}{2}p(x_i)$, dan untuk $i > 1$ hitung $c_i = -1 - \frac{h}{2}p(x_i)$.
3. Tambahkan nilai batas: $d_1 \leftarrow d_1 + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha$ dan $d_N \leftarrow d_N + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right)\beta$.
4. Selesaikan sistem tridiagonal $Aw = d$ dengan faktorisasi Crout: $l_1 = a_1$, $u_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $z_1 = \frac{d_1}{l_1}$; untuk $i = 2, \ldots, N$: $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$, $u_i = \frac{b_i}{l_i}$ (kecuali $i = N$), $z_i = \frac{d_i - c_i z_{i-1}}{l_i}$.
5. Substitusi mundur: $w_N = z_N$ dan $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$ untuk $i = N-1, \ldots, 1$.
6. Tetapkan $w_0 = \alpha$, $w_{N+1} = \beta$, lalu keluarkan pasangan (x_i, w_i) untuk $i = 0, \ldots, N+1$.
7. Bila perlu, ulangi dengan $h/2$ dan lakukan ekstrapolasi Richardson pada simpul yang sama.

Siahaan

Contoh 1: Soal $y'' = y + x$ dengan $N = 3$

Hampiri solusi $y'' = y + x$ pada $[0, 1]$ dengan $y(0) = 0$ dan $y(1) = 0$ memakai $N = 3$ (jadi $h = 0{,}25$). Bandingkan dengan solusi eksak $y(x) = \frac{\sinh x}{\sinh 1} - x$.

Penyelesaian.

Di sini $p = 0$, $q = 1$, $r(x) = x$, jadi syarat $q \geq 0$ terpenuhi dan $L = 0$ sehingga tidak ada batas pada h. Simpul dalam: $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 0{,}75$. Diagonal utama $2 + h^2 q = 2{,}0625$, diagonal di atas dan di bawahnya -1 (karena $p = 0$), dan ruas kanan $-h^2 r(x_i) = -0{,}0625 x_i$, yaitu $-0{,}015625$; $-0{,}03125$; $-0{,}046875$. Nilai batas nol tidak menambah apa pun. Sistemnya:

$$2{,}0625 w_1 - w_2 = -0{,}015625$$

$$-w_1 + 2{,}0625 w_2 - w_3 = -0{,}03125$$

$$-w_2 + 2{,}0625 w_3 = -0{,}046875$$

Penyelesaian sistem (eliminasi Gauss untuk matriks tridiagonal) memberi $w_1 = -0{,}034885$, $w_2 = -0{,}056326$, $w_3 = -0{,}050037$. Solusi eksak: $y(0{,}25) = -0{,}035048$, $y(0{,}5) = -0{,}056591$, $y(0{,}75) = -0{,}050276$. Galat mutlaknya sekitar $1{,}6 \times 10^{-4}$, $2{,}7 \times 10^{-4}$, dan $2{,}4 \times 10^{-4}$, sesuai orde $O(h^2)$ dengan $h^2 = 0{,}0625$ dan konstanta yang kecil.

Contoh 2: Ekstrapolasi Richardson untuk soal yang sama

Ulangi Contoh 1 dengan $N = 7$ ($h = 0{,}125$) dan ekstrapolasikan hasilnya bersama hasil $h = 0{,}25$ pada $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$.

Penyelesaian.

Dengan $h = 0{,}125$ simpul $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$ adalah simpul ke-2, ke-4, dan ke-6 dan hasilnya $w = -0{,}035007;\ -0{,}056524;\ -0{,}050216$. Galatnya turun sekitar empat kali lipat ($4{,}1 \times 10^{-5}$, $6{,}7 \times 10^{-5}$, $6{,}0 \times 10^{-5}$), konsisten dengan orde dua. Ekstrapolasi pertama

$$\text{Ext} = \frac{4w(h = 0{,}125) - w(h = 0{,}25)}{3}$$

memberi $-0{,}035047;\ -0{,}056590;\ -0{,}050275$, yang berbeda dari solusi eksak hanya sekitar 10^{-6}. Jadi dua kali hitung dengan sistem kecil menghasilkan ketelitian yang jauh lebih baik daripada memperhalus mesh sampai galat yang sama.

Contoh 3: Matriks untuk soal dengan $p \neq 0$ dan batas h

Untuk $y'' = 0{,}5y' + 0{,}5y$ pada $[0, 1]$ dengan $y(0) = 1$, $y(1) = e$ dan $N = 3$, susun elemen matriks dan ruas kanan, lalu periksa syarat $h < 2/L$. (Solusi eksaknya $y = e^x$.)

Penyelesaian.

Di sini $p = q = 0{,}5$, $r = 0$, $L = 0{,}5$, dan $h = 0{,}25 < \frac{2}{0{,}5} = 4$ sehingga syarat terpenuhi (dan $q \geq 0$). Diagonal utama: $2 + h^2 q = 2{,}03125$. Diagonal atas: $-1 + \frac{h}{2}p = -1 + 0{,}0625 = -0{,}9375$. Diagonal bawah: $-1 - \frac{h}{2}p = -1{,}0625$. Ruas kanan: $d_1 = \left(1 + \frac{h}{2}p\right)\alpha = 1{,}0625$, $d_2 = 0$, dan $d_3 = \left(1 - \frac{h}{2}p\right)\beta = 0{,}9375e = 2{,}548389$. Penyelesaiannya $w = (1{,}284025;\ 1{,}648720;\ 2{,}116999)$ dibanding e^x = $(1{,}284025;\ 1{,}648721;\ 2{,}117000)$, selisih hanya sekitar 10^{-6}. Perhatikan bahwa sistemnya tidak simetris karena $p \neq 0$ (diagonal atas dan bawah berbeda).

Kesalahan umum

• Lupa bahwa nilai batas harus dipindahkan ke ruas kanan. Persamaan pertama menerima $\left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha$ dan persamaan terakhir $\left(1 - \frac{h}{2}p(x_N)\right)\beta$; tanda pada suku p berbeda di kedua ujung.

• Salah menghitung h. Dengan N simpul dalam, $h = \frac{b-a}{N+1}$, bukan $\frac{b-a}{N}$; kekeliruan ini menggeser seluruh simpul dan menghasilkan jawaban yang tampak masuk akal tetapi salah.

• Mengabaikan syarat $q(x) \geq 0$. Bila q negatif, soal nilai batasnya sendiri bisa tidak punya solusi tunggal (misalnya mendekati nilai eigen), dan sistem beda hingga bisa singular.

• Mengira $O(h^2)$ tercapai otomatis. Orde ini mengandaikan $y \in C^4[a, b]$; bila p, q, r kurang mulus, ketelitian nyata bisa lebih rendah.

• Menerapkan ekstrapolasi $\frac{4w(h/2) - w(h)}{3}$ pada simpul yang tidak sama. Rumus ini hanya berlaku di titik yang dipakai bersama oleh kedua mesh.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa matriks sistem beda hingga bersifat tridiagonal? Apa konsekuensinya bagi biaya hitung dibanding sistem penuh $N \times N$?
2. Bandingkan metode tembak linear dan beda hingga linear dari sisi kestabilan, orde ketelitian, dan biaya. Dalam keadaan apa Anda memilih masing-masing?
3. Apa makna syarat $h < 2/L$? Apa yang bisa terjadi pada tanda elemen luar diagonal bila syaratnya dilanggar, misalnya untuk $|p|$ besar (masalah dominan konveksi)?
4. Mengapa galat beda hingga hanya memuat pangkat genap h, dan bagaimana sifat itu menjelaskan keberhasilan ekstrapolasi Richardson?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Persamaan $y'' = 20y' + y$ pada $[0, 2]$ dipecahkan dengan metode beda hingga linear. Berapa nilai N terkecil agar syarat $h < 2/L$ terpenuhi?

Kunci: $L = 20$, jadi $h < 0{,}1$. Karena $h = \frac{2}{N+1}$, perlu $N + 1 > 20$, yaitu $N \geq 20$ (dengan $N = 19$ diperoleh $h = 0{,}1$ tepat, yang belum memenuhi ketaksamaan tegas).

2. Untuk $y'' = y' + y$ pada $[0, 1]$ dengan $y(0) = 1$, $y(1) = 2$, dan $N = 4$, tuliskan h, ketiga diagonal matriks A, serta d_1 dan d_4.

Kunci: $h = 0{,}2$. Diagonal utama $2 + 0{,}04 = 2{,}04$; diagonal atas $-1 + 0{,}1 = -0{,}9$; diagonal bawah $-1 - 0{,}1 = -1{,}1$. Karena $r = 0$: $d_1 = (1 + 0{,}1) \cdot 1 = 1{,}1$ dan $d_4 = (1 - 0{,}1) \cdot 2 = 1{,}8$; $d_2 = d_3 = 0$.

3. Dengan $h = 0{,}2$ dan $h = 0{,}1$ diperoleh hampiran $0{,}5321$ dan $0{,}5304$ di titik yang sama. Hitung ekstrapolasi Richardson pertama.

Kunci: $\frac{4(0{,}5304) - 0{,}5321}{3} = \frac{1{,}5895}{3} \approx 0{,}5298$.

4. Selesaikan $y'' = 2$ pada $[0, 1]$ dengan $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ memakai $N = 1$. Bandingkan dengan solusi eksak dan jelaskan hasilnya.

Kunci: $h = \frac{1}{2}$, $p = q = 0$, $r = 2$, $A = [2]$, $d_1 = -h^2 r + \beta = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$, jadi $w_1 = 0{,}25$. Solusi eksak $y = x^2$ memberi $y(0{,}5) = 0{,}25$, sama persis, karena $y^{(4)} \equiv 0$ sehingga suku galat pemotongan beda terpusat hilang.

Web by.

11.4 Finite-Difference Methods for Nonlinear Problems

Rujukan buku: halaman 691

Bila persamaan diferensialnya tidak linear terhadap y dan y', soal nilai batasnya berbentuk

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

Gagasan dasarnya sama seperti pada Seksi 11.3: bagi $[a, b]$ menjadi $N+1$ bagian sama panjang, $h = \frac{b-a}{N+1}$, $x_i = a + ih$, ganti y'' dan y' dengan beda terpusat berorde $O(h^2)$, dan pasang persamaan di setiap simpul dalam. Bedanya, hasilnya adalah sistem N persamaan tak linear dengan N bilangan tak diketahui $w_1, \ldots, w_N$, sehingga perlu proses iteratif. Dengan $w_0 = \alpha$ dan $w_{N+1} = \beta$, persamaan di simpul ke-i adalah

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f\left(x_i,\ w_i,\ \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

Agar solusi soalnya ada dan tunggal, diasumsikan (seperti pada Teorema 11.1) bahwa f, f_y, dan $f_{y'}$ kontinu pada daerah $D = \{(x, y, y') \mid a \le x \le b,\ -\infty < y, y' < \infty\}$, bahwa $f_y(x, y, y') \ge \delta > 0$ pada D untuk suatu δ, dan bahwa $f_{y'}$ terbatas oleh konstanta L. Di bawah syarat ini, sistem beda berhingga memiliki solusi tunggal bila $h < \frac{2}{L}$, dan galatnya berorde $O(h^2)$ asalkan solusi eksaknya cukup mulus (turunan keempat terbatas). Syarat $f_y > 0$ adalah padanan nonlinear dari syarat $q \ge 0$ pada soal linear.

Sistem tak linear itu diselesaikan dengan metode Newton untuk sistem (Seksi 10.2). Tulis sistemnya sebagai $F(w) = 0$ dengan komponen $F_i(w) = -w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f(x_i, w_i, t_i)$, dengan $t_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$. Matriks Jacobi $J = \left(\frac{\partial F_i}{\partial w_j}\right)$ hanya berisi tiga diagonal karena F_i hanya bergantung pada w_{i-1}, w_i, w_{i+1}:

$$J_{ii} = 2 + h^2 f_y(x_i, w_i, t_i), \quad J_{i,\,i+1} = -1 + \tfrac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, t_i), \quad J_{i,\,i-1} = -1 - \tfrac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, t_i)$$

Setiap iterasi Newton menyelesaikan $J(w^{(k-1)})\, v = -F(w^{(k-1)})$ lalu memperbarui $w^{(k)} = w^{(k-1)} + v$. Karena J tridiagonal, tiap iterasi hanya memerlukan $O(N)$ operasi dengan algoritma Crout. Perhatikan bahwa pada baris pertama dan terakhir, nilai batas α dan β masuk sebagai w_0 dan w_{N+1} ke dalam F_1, F_N dan ke dalam argumen t_1, t_N. Kalau f linear dalam y dan y', J konstan dan Newton selesai dalam satu iterasi, yang sama dengan metode Seksi 11.3.

Tebakan awal yang lazim dipakai adalah garis lurus yang menghubungkan kedua titik batas, $w_i^{(0)} = \alpha + i\,\frac{\beta - \alpha}{b - a}\,h$. Newton hanya dijamin konvergen bila tebakan awal cukup dekat ke solusi dan J tak singular di sepanjang jalan, sehingga perlu batas jumlah iterasi maksimum; bila terlampaui, perbaiki tebakan awal atau perkecil h. Konvergensi Newton cepat (kuadratik) dalam beberapa iterasi, dan karena galat beda hingga $O(h^2)$ lebih besar daripada toleransi iterasi, ketelitian akhir dibatasi oleh h, bukan oleh Newton. Untuk memperbaikinya, dapat dilakukan ekstrapolasi Richardson dengan cara yang sama seperti pada soal linear: $\frac{4w_i(h/2) - w_i(h)}{3}$ pada simpul bersama.

Dibandingkan metode tembak nonlinear (Seksi 11.2), metode ini lebih stabil dan tidak peka terhadap tebakan kemiringan awal, tetapi untuk ketelitian yang sama memerlukan lebih banyak simpul. Dibandingkan metode tembak, cukup satu sistem tridiagonal per iterasi, tanpa mengintegrasikan persamaan diferensial berulang kali.

Konsep kunci

Sistem tak linear — Menempatkan persamaan diferensial di tiap simpul dalam menghasilkan N persamaan tak linear untuk $w_1, \ldots, w_N$; solusinya harus dicari secara iteratif.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Syarat $f_y \geq \delta > 0$ — Padanan syarat $q \geq 0$ pada kasus linear. Bersama $f, f_y, f_{y'}$ kontinu dan $f_{y'}$ terbatas oleh L, syarat ini menjamin solusi tunggal.

Batas langkah — Sistem beda hingga mempunyai solusi tunggal bila $h < 2/L$, dengan L batas atas $|f_{y'}|$.

Matriks Jacobi tridiagonal — J memiliki diagonal $2 + h^2 f_y$, diagonal atas $-1 + \frac{h}{2} f_{y'}$, dan diagonal bawah $-1 - \frac{h}{2} f_{y'}$, sehingga langkah Newton murah.

Metode Newton untuk sistem — Setiap iterasi menyelesaikan $Jv = -F$ lalu menambahkan v ke tebakan; konvergen cepat bila tebakan awal cukup dekat dan J tak singular.

Tebakan awal garis lurus — Tanpa informasi lain, mulai dari garis lurus antara (a, α) dan (b, β), dan tetapkan batas iterasi maksimum.

Kriteria berhenti — Iterasi dihentikan bila $\|v\|_\infty \leq \mathrm{TOL}$; orde akhir metode tetap $O(h^2)$ dan dapat diperbaiki dengan ekstrapolasi Richardson.

Persamaan beda di simpul x_i

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f\big(x_i, w_i, \tfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\big) = 0$$

Elemen Jacobi (diagonal utama)

$$J_{ii} = 2 + h^2 f_y\big(x_i, w_i, \tfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\big)$$

Elemen Jacobi (diagonal atas dan bawah)

$$J_{i,\,i+1} = -1 + \tfrac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, t_i)$$

$$J_{i,\,i-1} = -1 - \tfrac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, t_i)$$

Langkah Newton

$$J(w^{(k-1)})v = -F(w^{(k-1)}), \qquad w^{(k)} = w^{(k-1)} + v$$

Tebakan awal

$$w_i^{(0)} = \alpha + i\,\tfrac{\beta - \alpha}{b - a}\,h$$

Syarat

$$f_y \geq \delta > 0, \qquad |f_{y'}| \leq L, \qquad h < \tfrac{2}{L}$$

Algoritma: Beda hingga nonlinear (Newton)

1. Masukkan a, b, α, β, $N \geq 2$, toleransi TOL, dan iterasi maksimum M. Hitung $h = \frac{b-a}{N+1}$, $w_0 = \alpha$, $w_{N+1} = \beta$.
2. Tetapkan tebakan awal $w_i = \alpha + i\,\frac{\beta - \alpha}{b - a}\,h$ untuk $i = 1, \ldots, N$, dan $k = 1$.
3. Selama $k \leq M$: untuk tiap i hitung $x_i = a + ih$ dan $t_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$ (dengan $w_0 = \alpha$, $w_{N+1} = \beta$).

4. Bentuk J: $a_i = 2 + h^2 f_y(x_i, w_i, t_i)$, $b_i = -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, t_i)$ (diagonal atas), $c_i = -1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, t_i)$ (diagonal bawah), dan ruas kanan $d_i = -\left[-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f(x_i, w_i, t_i)\right]$.
5. Selesaikan $Jv = d$ dengan faktorisasi Crout (tridiagonal), lalu perbarui $w_i \leftarrow w_i + v_i$ untuk semua i.
6. Bila $\max_i |v_i| \le \mathrm{TOL}$, keluarkan (x_i, w_i) untuk $i = 0, \ldots, N+1$ dan berhenti.
7. Bila tidak, naikkan k dan ulangi. Bila $k > M$, laporkan bahwa iterasi maksimum terlampaui (ganti tebakan awal atau perkecil h).

Contoh 1: Newton untuk $y'' = y + y^3$ dengan $N = 3$

Hampiri solusi $y'' = y + y^3$ pada $[0, 1]$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ dengan $N = 3$ ($h = 0{,}25$). Mulai dari garis lurus. Periksa syarat dan tunjukkan perkembangan iterasi.

Penyelesaian.

Di sini $f = y + y^3$, $f_y = 1 + 3y^2 \ge 1 = \delta$, $f_{y'} = 0$ (jadi $L = 0$ dan tidak ada batas pada h). Tebakan awal $w^{(0)} = (0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75)$. Dengan Jacobi tridiagonal simetris (karena $f_{y'} = 0$) diagonal utamanya $2 + h^2(1 + 3w_i^2)$ dan di luar diagonal -1, hasil iterasi Newton:

$w^{(1)} = (0{,}208567;\ 0{,}430661;\ 0{,}684233)$, dengan koreksi terbesar $\|v\|_\infty = 0{,}0693$.

$w^{(2)} = (0{,}208219;\ 0{,}430016;\ 0{,}683658)$, dengan $\|v\|_\infty = 6{,}4 \times 10^{-4}$.

$w^{(3)}$ berbeda dari $w^{(2)}$ hanya $4{,}8 \times 10^{-8}$, dan $w^{(4)}$ hanya 2×10^{-16}.

Koreksi menyusut kira-kira dikuadratkan tiap iterasi, ciri khas konvergensi kuadratik Newton. Sebagai pembanding, hasil sangat halus (dengan $N = 799$) di titik yang sama adalah $0{,}207044;\ 0{,}427959;\ 0{,}681529$, jadi galat metode dengan $h = 0{,}25$ sekitar $1{,}2 \times 10^{-3}$ sampai $2{,}1 \times 10^{-3}$. Galat itu berasal dari beda hingga, bukan dari Newton.

Contoh 2: Menyusun Jacobi untuk f yang bergantung pada y'

Untuk $y'' = y + \frac{1}{2}(y')^2$ pada $[0, 1]$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $N = 3$, hitung matriks Jacobi dan ruas kanan pada tebakan awal garis lurus, lalu ringkas hasil iterasinya.

Penyelesaian.

Di sini $f_y = 1$, $f_{y'} = y'$ (jadi $f_{y'}$ tak terbatas, namun soal ini tetap dipakai sebagai latihan teknis). Tebakan awal $w^{(0)} = (0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75)$ memberi $t_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} = 1$ untuk semua i (garis lurus berkemiringan 1). Maka $f = y + \frac{1}{2}t^2 = 0{,}75;\ 1{,}0;\ 1{,}25$. Residu $F_i = h^2 f_i$ karena bagian beda kedua nol untuk garis lurus: $F = (0{,}046875;\ 0{,}0625;\ 0{,}078125)$. Jacobi: diagonal utama $2 + h^2 \cdot 1 = 2{,}0625$; diagonal atas $-1 + \frac{h}{2} \cdot 1 = -0{,}875$; diagonal bawah $-1 - \frac{h}{2} \cdot 1 = -1{,}125$ (tidak simetris karena $f_{y'} \neq 0$). Menyelesaikan $Jv = -F$ memberi $w^{(1)} = (0{,}180860;\ 0{,}390598;\ 0{,}652448)$. Iterasi berikutnya: $w^{(2)} = (0{,}179506;\ 0{,}389162;\ 0{,}650920)$ dengan koreksi $1{,}5 \times 10^{-3}$, kemudian koreksi $2{,}6 \times 10^{-7}$ dan $6{,}9 \times 10^{-15}$.

Contoh 3: Ekstrapolasi Richardson untuk $y'' = y + y^3$

Dengan hasil $h = 0{,}25$ pada Contoh 1 dan hasil $h = 0{,}125$ ($N = 7$) di $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$, lakukan ekstrapolasi dan bandingkan dengan nilai acuan.

Penyelesaian.

Hasil iterasi konvergen dengan $h = 0{,}125$ di ketiga titik adalah $0{,}207348;\ 0{,}428492;\ 0{,}682084$ (galat $3{,}0 \times 10^{-4}$, $5{,}3 \times 10^{-4}$, $5{,}5 \times 10^{-4}$ terhadap nilai acuan $0{,}207044;\ 0{,}427959;\ 0{,}681529$), jadi galat turun sekitar empat kali. Ekstrapolasi pertama

$$\frac{4w(0{,}125) - w(0{,}25)}{3}$$

menghasilkan $0{,}207057;\ 0{,}427984;\ 0{,}681560$ dengan galat hanya $1{,}3 \times 10^{-5}$, $2{,}5 \times 10^{-5}$, dan $3{,}1 \times 10^{-5}$, yaitu satu setengah orde besaran lebih baik daripada hasil $h = 0{,}125$.

Kesalahan umum

• Lupa menyertakan nilai batas pada persamaan pertama dan terakhir. $w_0 = \alpha$ muncul di F_1 dan di $t_1 = \frac{w_2 - \alpha}{2h}$; $w_{N+1} = \beta$ muncul di F_N dan di $t_N = \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}$.

• Memperbarui w_i satu per satu di tengah iterasi. Seluruh F dan J harus dihitung dari vektor $w^{(k-1)}$ yang sama, baru setelah itu v ditambahkan ke semua komponen sekaligus.

• Salah tanda pada diagonal atas/bawah Jacobi: diagonal atas memakai $-1 + \frac{h}{2} f_{y'}$ dan diagonal bawah $-1 - \frac{h}{2} f_{y'}$. Menukarnya hanya terlihat saat $f_{y'} \neq 0$.

• Mengira ketelitian ditentukan oleh toleransi Newton. Meskipun iterasi dihentikan pada 10^{-8}, galat terhadap solusi sebenarnya tetap $O(h^2)$; toleransi kecil tidak memperbaikinya.

• Memakai tebakan awal yang buruk lalu menganggap kegagalan konvergensi sebagai kesalahan program. Newton hanya konvergen lokal; gunakan batas iterasi, ganti tebakan awal, atau perkecil h.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa syarat $f_y \geq \delta > 0$ penting? Bandingkan dengan peran $q \geq 0$ pada Seksi 11.3.
2. Apa yang terjadi pada Jacobi dan jumlah iterasi Newton bila f ternyata linear dalam y dan y'?
3. Bandingkan metode tembak nonlinear (Seksi 11.2) dan beda hingga nonlinear dari sisi tebakan awal yang dibutuhkan, biaya per iterasi, dan kestabilan.
4. Mengapa tebakan awal berupa garis lurus masuk akal? Berikan contoh soal di mana tebakan itu sangat buruk.

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $f(x, y, y') = y + \sin(y)$, tuliskan f_y dan periksa apakah syarat $f_y \geq \delta > 0$ terpenuhi.

Kunci: $f_y = 1 + \cos y \geq 0$ tetapi bernilai 0 saat $y = \pi + 2k\pi$. Tidak ada $\delta > 0$ yang berlaku di seluruh D, jadi syarat tidak terpenuhi dan solusi tunggal tidak dijamin oleh teorema ini.

2. Untuk $f = xy' + y$ pada $[0, 1]$, tuliskan J_{ii}, $J_{i,i+1}$, dan $J_{i,i-1}$ dan tentukan apakah J simetris.

Kunci: $f_y = 1$, $f_{y'} = x$. $J_{ii} = 2 + h^2$, $J_{i,i+1} = -1 + \frac{h}{2}x_i$, $J_{i,i-1} = -1 - \frac{h}{2}x_i$. Karena $x_i > 0$, $J_{i,i+1} \neq J_{i+1,i} = -1 - \frac{h}{2}x_{i+1}$, jadi J tidak simetris.

3. Untuk $y'' = y + y^3$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $N = 3$, tunjukkan bahwa $F(w^{(0)})$ pada tebakan garis lurus $(0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75)$ sama dengan $h^2 f(x_i, w_i, t_i)$.

Kunci: Pada garis lurus $-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} = 0$ (beda kedua dari fungsi linear nol), sehingga $F_i = h^2(w_i + w_i^3) = 0{,}0625 \cdot (0{,}265625;\ 0{,}625;\ 1{,}171875) = (0{,}016602;\ 0{,}039063;\ 0{,}073242)$.

4. Dengan $h = 0{,}1$ dan $h = 0{,}05$ diperoleh hampiran $1{,}2480$ dan $1{,}2455$ pada titik yang sama. Berapa hasil ekstrapolasi Richardson?

Kunci: $\frac{4(1{,}2455) - 1{,}2480}{3} = \frac{3{,}7340}{3} = 1{,}2447$ (tepatnya $1{,}24467$).

Web by: Steven Paulus Siahaan

11.5 The Rayleigh-Ritz Method

Rujukan buku: halaman 696

Metode tembak mengubah soal nilai batas menjadi soal nilai awal, dan metode beda hingga mengganti turunan dengan hasil bagi beda. Metode Rayleigh-Ritz menempuh jalan ketiga, yaitu variasional: soal nilai batas ditulis ulang sebagai soal meminimumkan sebuah integral (fungsional) atas himpunan fungsi yang memenuhi syarat batas. Kemudian himpunan fungsi itu diperkecil menjadi kombinasi linear beberapa fungsi basis, dan integral diminimumkan atas koefisien kombinasinya. Hasilnya adalah sistem linear kecil untuk koefisien tersebut. Gagasan ini adalah akar metode elemen hingga.

Pembahasannya dilakukan untuk soal lenturan balok

$$-\tfrac{d}{dx}\big(p(x)\tfrac{dy}{dx}\big)+q(x)y=f(x),\quad 0\le x\le 1,\quad y(0)=y(1)=0$$

dengan $p\in C^1[0,1]$, $q, f\in C[0,1]$, serta ada $\delta>0$ sehingga $p(x)\ge\delta$ dan $q(x)\ge 0$ pada $[0,1]$. Di bawah asumsi ini soalnya mempunyai solusi tunggal. Misalkan $C_0^2[0,1]$ adalah himpunan fungsi $u\in C^2[0,1]$ dengan $u(0)=u(1)=0$. Teoremanya: $y\in C_0^2[0,1]$ adalah solusi persamaan diferensial di atas jika dan hanya jika y adalah satu-satunya fungsi di $C_0^2[0,1]$ yang meminimumkan

$$I[u]=\int_0^1 \{p(x)\,[u'(x)]^2+q(x)\,[u(x)]^2-2f(x)\,u(x)\}dx$$

Intuisinya: bila y solusi dan $u=y+\varepsilon v$ dengan $v\in C_0^2[0,1]$, maka syarat stasioner $\frac{d}{d\varepsilon}I[y+\varepsilon v]|_{\varepsilon=0}=0$ memberi $\int_0^1 (py'v'+qyv-fv)\,dx=0$ untuk setiap v. Satu kali integrasi bagian (dengan $v(0)=v(1)=0$) mengubah suku $py'v'$ menjadi $-(py')'v$, dan karena v sembarang, persamaan diferensialnya muncul. Kebalikannya juga benar, dan karena $p>0$, $q\ge 0$ integral kuadratiknya cembung sehingga titik stasioner itu adalah minimum tunggal. Dalam mekanika, I adalah (dua kali) energi, jadi solusi adalah konfigurasi berenergi minimum.

Pada metode Rayleigh-Ritz, minimisasi dilakukan hanya atas $\phi(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x)$, dengan $\phi_1,\ \dots,\phi_n$ bebas linear dan memenuhi $\phi_i(0)=\phi_i(1)=0$. Memasukkan ϕ ke I menjadikannya fungsi kuadrat dalam $c_1,\ \dots,c_n$; syarat $\frac{\partial I}{\partial c_j}=0$ memberi persamaan normal $Ac=b$ dengan

$$a_{ij}=\int_0^1 \big[p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)+q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\big]dx,\qquad b_i=\int_0^1 f(x)\phi_i(x)\,dx$$

Matriks A simetris, dan positif definit karena I kuadratik cembung; karena itu sistemnya selalu punya solusi tunggal. Bila solusi eksak kebetulan berada di ruang yang direntang oleh basis, metode ini menghasilkannya persis. Secara umum, ϕ adalah hampiran terbaik dalam arti energi, dan nilai minimum $I[\phi]=-c^Tb$ menurun (tidak pernah naik) ketika basis diperluas.

Pilihan basis menentukan karakter metode. Basis polinom global (misalnya $x(1-x)$, $x^2(1-x)$, ...) memberi sedikit koefisien tetapi matriks A penuh dan, untuk basis berderajat tinggi, mudah buruk kondisinya. Pilihan standar adalah basis linear sepotong-sepotong (piecewise linear, fungsi topi). Ambil partisi $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=1$ dengan $h_i=x_{i+1}-x_i$. Fungsi ϕ_i bernilai 1 di x_i, 0 di simpul lain, dan linear di antaranya; jadi ϕ_i hanya tak nol pada (x_{i-1},x_{i+1}) dan $c_i=\phi(x_i)$ adalah nilai hampiran di simpul. Karena dukungannya sangat pendek, $\phi_i\phi_j\equiv 0$ dan $\phi_i'\phi_j'\equiv 0$ bila $|i-j|\ge 2$, sehingga A tridiagonal, dengan

Web by: Steven Paulus Siahaan

$$a_{ii} = \tfrac{1}{h_{i-1}^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p\,dx + \tfrac{1}{h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p\,dx + \tfrac{1}{h_{i-1}^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2 q\,dx + \tfrac{1}{h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)^2 q\,dx$$

$$a_{i,\,i+1} = -\tfrac{1}{h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p\,dx + \tfrac{1}{h_i^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x)(x-x_i)\,q\,dx$$

dan $b_i = \tfrac{1}{h_{i-1}}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1}) f\,dx + \tfrac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}-x) f\,dx$. Integral-integral ini dihitung langsung bila mudah, dengan kuadratur seperti kaidah Simpson komposit, atau dengan mengganti p, q, f oleh interpolan linear sepotong-sepotongnya lalu mengintegralkan secara eksak. Bila p, q, f konstan dan mesh seragam, diperoleh $a_{ii} = \tfrac{2p}{h} + \tfrac{2qh}{3}$, $a_{i,\,i\pm1} = -\tfrac{p}{h} + \tfrac{qh}{6}$, dan $b_i = fh$.

Untuk basis linear sepotong-sepotong dengan $h = \max_i h_i$ dan solusi yang cukup mulus, galat hampiran di seluruh $[0,1]$ berorde $O(h^2)$, sama dengan beda hingga Seksi 11.3. Basis yang lebih mulus, misalnya spline kubik sepotong-sepotong, memberikan orde yang lebih tinggi (hingga $O(h^4)$ untuk solusi mulus). Keunggulan Rayleigh-Ritz dibanding beda hingga: hampiran berupa fungsi yang terdefinisi di seluruh selang (bukan hanya di simpul), syarat batas alami mudah ditangani, mesh tidak seragam mudah dipakai, dan kerangka teorinya (matriks simetris positif definit, hampiran energi terbaik) kuat. Keterbatasannya, rumus di sini hanya untuk soal yang dapat ditulis variasional (bentuk berpasangan diri, tanpa suku y' tunggal) dan perakitan integral memerlukan kerja ekstra.

Konsep kunci

Prinsip variasional — Solusi soal balok $-(py')' + qy = f$ dengan $y(0) = y(1) = 0$ adalah satu-satunya fungsi di $C_0^2[0,1]$ yang meminimumkan $I[u] = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2 - 2fu)\,dx$, asalkan $p \ge \delta > 0$ dan $q \ge 0$.

Ruang basis — Minimisasi dibatasi pada $\phi = \sum c_i \phi_i$ dengan ϕ_i bebas linear dan $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$; ketelitian ditentukan oleh seberapa baik ruang ini memuat solusi.

Persamaan normal — $\tfrac{\partial I}{\partial c_j} = 0$ menghasilkan $Ac = b$ dengan A simetris positif definit, $a_{ij} = \int (p\phi_i'\phi_j' + q\phi_i\phi_j)$, dan $b_i = \int f\phi_i$.

Fungsi topi (linear sepotong-sepotong) — ϕ_i bernilai 1 di x_i, 0 di simpul lain, linear di antaranya, sehingga koefisien c_i sama dengan nilai hampiran di x_i.

Matriks tridiagonal — Dukungan ϕ_i hanya (x_{i-1}, x_{i+1}) sehingga $a_{ij} = 0$ bila $|i-j| \ge 2$; sistemnya diselesaikan dalam $O(n)$ operasi.

Orde galat — Basis linear sepotong-sepotong memberi galat $O(h^2)$ pada seluruh selang bila solusi mulus; basis spline kubik memberi orde lebih tinggi.

Hampiran energi terbaik — $I[\phi] = -c^T b$ dan nilai ini tidak pernah naik bila basis diperluas, karena minimisasi dilakukan atas ruang yang lebih besar.

Fungsional energi

$$I[u] = \int_0^1 \{p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x)\}dx$$

Hampiran dan sistem normal

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x), \qquad Ac = b$$

Web by: Steven Paulus Siahaan

Entri umum A dan b

$$a_{ij} = \int_0^1 \left[p\phi_i'\phi_j' + q\phi_i\phi_j\right] dx$$

$$b_i = \int_0^1 f\phi_i \, dx$$

Fungsi topi

$\phi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (x_{i-1} \le x \le x_i), \qquad \phi_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \quad (x_i \le x \le x_{i+1})$

Mesh seragam, p, q, f konstan

$$a_{ii} = \frac{2p}{h} + \frac{2qh}{3}$$

$$a_{i,\,i\pm1} = -\frac{p}{h} + \frac{qh}{6}$$

$$b_i = fh$$

Nilai minimum

$$I[\phi] = c^T Ac - 2c^T b = -c^T b$$

Algoritma: Rayleigh-Ritz dengan basis linear sepotong-sepotong

1. Masukkan p, q, f dan partisi $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = 1$; hitung $h_i = x_{i+1} - x_i$.
2. Definisikan fungsi topi $\phi_1, \ldots, \phi_n$ dengan $\phi_i(x_i) = 1$ dan linear sepotong-sepotong, nol di luar (x_{i-1}, x_{i+1}).
3. Hitung integral elemen: $\int p$, $\int (x - x_{i-1})^2 q$, $\int (x_{i+1} - x)^2 q$, $\int (x_{i+1} - x)(x - x_i) q$, dan $\int (x - x_{i-1}) f$, $\int (x_{i+1} - x) f$ pada tiap subselang (eksak atau dengan kuadratur).
4. Rakit a_{ii}, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$, dan b_i dari integral-integral itu; matriks A tridiagonal dan simetris.
5. Selesaikan $Ac = b$ dengan faktorisasi tridiagonal (Crout atau Cholesky).
6. Bentuk $\phi(x) = \sum c_i \phi_i(x)$. Nilai di simpul: $\phi(x_i) = c_i$; di titik lain gunakan interpolasi linear antara simpul.

Contoh 1: Basis topi, $-y'' + y = 1$ dengan $n = 3$

Hampiri solusi $-y'' + y = 1$ pada $[0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$ dengan tiga fungsi topi pada mesh seragam ($h = 0{,}25$). Solusi eksaknya $y = 1 - \frac{\cosh(x - \frac{1}{2})}{\cosh \frac{1}{2}}$.

Penyelesaian.

Di sini $p = q = f = 1$, jadi $a_{ii} = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} = 8 + \frac{1}{6} = 8{,}166667$, $a_{i,\,i\pm1} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} = -4 + \frac{1}{24} = -3{,}958333$, dan $b_i = h = 0{,}25$. Sistemnya

$$8{,}166667c_1 - 3{,}958333c_2 = 0{,}25$$

$$-3{,}958333c_1 + 8{,}166667c_2 - 3{,}958333c_3 = 0{,}25$$

$$-3{,}958333c_2 + 8{,}166667c_3 = 0{,}25$$

Solusinya $c = (0{,}085731;\ 0{,}113719;\ 0{,}085731)$, simetris seperti yang diharapkan. Nilai eksak di $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$ adalah $0{,}085323;\ 0{,}113181;\ 0{,}085323$, jadi galat sekitar 4×10^{-4} sampai 5×10^{-4}, sesuai orde $O(h^2)$.

Contoh 2: Basis polinom global, $-((1+x)y')' = 1$

Hampiri $-((1+x)y')' = 1$ pada $[0,1]$, $y(0) = y(1) = 0$ (jadi $p = 1+x$, $q = 0$, $f = 1$) dengan $\phi_1 = x(1-x)$, lalu tambahkan $\phi_2 = x^2(1-x)$. Solusi eksak $y = -x + \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$.

Penyelesaian.

Untuk $n = 1$: $a_{11} = \int_0^1 (1+x)(1-2x)^2 dx = \frac{1}{2}$ dan $b_1 = \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{6}$, jadi $c_1 = \frac{1}{3}$ dan $\phi(x) = \frac{1}{3}x(1-x)$. Di $x = 0{,}5$ nilainya $0{,}08333$ dibanding eksak $0{,}08496$.

Untuk $n = 2$, dengan $\phi_2' = 2x - 3x^2$: $a_{12} = 0{,}283333$, $a_{22} = 0{,}233333$, $b_2 = \frac{1}{12} = 0{,}083333$. Sistemnya $0{,}5c_1 + 0{,}283333c_2 = 0{,}166667$ dan $0{,}283333c_1 + 0{,}233333c_2 = 0{,}083333$, yang memberi $c_1 = 0{,}419847$, $c_2 = -0{,}152672$. Nilainya di $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$: $0{,}071565;\ 0{,}085878;\ 0{,}057252$, dibanding eksak $0{,}071928;\ 0{,}084963;\ 0{,}057355$. Nilai minimum $I[\phi] = -\frac{1}{18} = -0{,}055556$ untuk $n = 1$ dan $-0{,}057252$ untuk $n = 2$, mendekati nilai eksak $-\int_0^1 y\,dx = -0{,}057305$; nilai minimum turun saat basis diperluas, sesuai teori.

Contoh 3: Basis topi untuk koefisien tidak konstan

Untuk soal Contoh 2 ($p = 1+x$, $q = 0$, $f = 1$) gunakan tiga fungsi topi pada mesh seragam $h = 0{,}25$. Tuliskan matriks A dan bandingkan hasilnya.

Penyelesaian.

Karena p linear, $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p\,dx = h\,p(x_i + \frac{h}{2})$. Maka $a_{ii} = \frac{1}{h}\left[p(x_i - \frac{h}{2}) + p(x_i + \frac{h}{2})\right] = \frac{2(1+x_i)}{h}$ dan $a_{i,i+1} = -\frac{1 + x_i + h/2}{h}$. Dengan $x_i = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$: $a_{11} = 10$, $a_{22} = 12$, $a_{33} = 14$, $a_{12} = -5{,}5$, $a_{23} = -6{,}5$, dan $b_i = 0{,}25$. Solusinya $c = (0{,}071493;\ 0{,}084532;\ 0{,}057104)$ dibanding eksak $(0{,}071928;\ 0{,}084963;\ 0{,}057355)$, galat sekitar 4×10^{-4}. Nilai $I[\phi] = -c^T b = -0{,}053282$ lebih besar daripada nilai minimum eksak $-0{,}057305$, sebagaimana yang wajar karena minimisasi hanya dilakukan di ruang basis.

Kesalahan umum

• Memakai basis yang tidak memenuhi syarat batas homogen, misalnya $\phi_i(0) \neq 0$. Seluruh teori di seksi ini mengandaikan $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$ agar ϕ ada di $C_0^2[0,1]$.

• Mengira c_i selalu nilai hampiran di simpul. Itu benar hanya untuk fungsi topi yang bernilai 1 di x_i; untuk basis polinom global, c_i hanya koefisien dan nilai di titik harus dihitung dari $\phi(x) = \sum c_i \phi_i(x)$.

• Lupa bahwa A memuat turunan basis. Entri $a_{ij} = \int (p\phi_i'\phi_j' + q\phi_i\phi_j)$, jadi turunan ϕ_i' konstan per subselang pada basis topi (bernilai $\frac{1}{h_{i-1}}$ dan $-\frac{1}{h_i}$), bukan nol.

• Menyamakan Rayleigh-Ritz dengan metode beda hingga. Hasilnya mirip untuk mesh seragam dan koefisien konstan, tetapi dasar penurunannya berbeda dan Rayleigh-Ritz menghasilkan fungsi di seluruh selang, bukan hanya nilai simpul.

• Menganggap solusi yang diperoleh meminimumkan galat titik demi titik. Metode ini meminimumkan I, yaitu ukuran energi; galat di sebuah titik tertentu bisa saja lebih besar daripada metode lain.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa A simetris positif definit? Apa peran syarat $p \geq \delta > 0$ dan $q \geq 0$?
2. Bagaimana prinsip variasional menjelaskan bahwa nilai minimum $I[\phi]$ tidak naik ketika basis diperluas? Apa artinya bagi galat energi?
3. Bandingkan basis polinom global dengan fungsi topi dari sisi kondisi matriks, ketersebaran (sparsity), dan kemudahan memperhalus hampiran.
4. Bagaimana Anda menangani syarat batas tak homogen $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$ pada kerangka ini?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Selesaikan $-y'' = 1$ pada $[0,1]$, $y(0) = y(1) = 0$, dengan satu basis $\phi_1 = x(1-x)$. Bandingkan dengan solusi eksak.

Kunci: $a_{11} = \int_0^1 (1-2x)^2 dx = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{1}{6}$, jadi $c_1 = \frac{1}{2}$ dan $\phi = \frac{x(1-x)}{2}$. Solusi eksak $y = \frac{x(1-x)}{2}$: hasil sama persis karena solusi eksak berada dalam ruang basis.

2. Untuk $-y'' + y = 1$ pada $[0,1]$ dengan $\phi_1 = x(1-x)$, hitung c_1 dan $\phi(0{,}5)$. Bandingkan dengan $y(0{,}5) = 1 - \frac{1}{\cosh 0{,}5}$.

Kunci: $a_{11} = \int_0^1 \left[(1-2x)^2 + x^2(1-x)^2\right] dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{11}{30}$, $b_1 = \frac{1}{6}$, $c_1 = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545$, $\phi(0{,}5) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{11} = 0{,}11364$. Eksak $y(0{,}5) = 0{,}11318$, selisih $4{,}6 \times 10^{-4}$.

3. Untuk $-y'' = 1$ dengan 4 fungsi topi pada mesh seragam ($h = 0{,}2$), tuliskan A dan b serta tunjukkan bahwa $c_i = \frac{x_i(1-x_i)}{2}$ memenuhi sistem.

Kunci: $a_{ii} = \frac{2}{h} = 10$, $a_{i,i\pm1} = -\frac{1}{h} = -5$, $b_i = h = 0{,}2$. Untuk $c = (0{,}08;\ 0{,}12;\ 0{,}12;\ 0{,}08)$: baris 1: $10(0{,}08) - 5(0{,}12) = 0{,}2$; baris 2: $-5(0{,}08) + 10(0{,}12) - 5(0{,}12) = 0{,}2$; baris 3 dan 4 simetris dengan baris 2 dan 1. Terpenuhi, jadi nilai simpulnya persis sama dengan nilai solusi eksak.

4. Berapa banyak entri tak nol pada A bila dipakai $n = 10$ fungsi topi? Mengapa?

Kunci: A tridiagonal: 10 elemen diagonal, 9 di atas, 9 di bawah, total 28 dari 100 entri. Alasannya $\phi_i\phi_j \equiv 0$ dan $\phi_i'\phi_j' \equiv 0$ untuk $|i-j| \geq 2$ karena dukungan keduanya hanya tumpang tindih bila $|i-j| \leq 1$.

Pesan Utama

Ingat

Beda hingga kokoh dan menghasilkan sistem tridiagonal; tembak sederhana tetapi bisa tidak stabil bila solusi tumbuh cepat.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan