MATERI PERKULIAHAN ANALISIS NUMERIK

Bab 12

Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial

Numerical Solutions to Partial Differential Equations

Halaman buku 713 – 760 • 5 seksi

Catatan penggunaan

Dokumen ini adalah ringkasan belajar yang ditulis ulang dan disusun berdasarkan Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010. Dokumen ini bukan pengganti buku: bukti teorema, contoh lengkap, dan soal latihan ada di buku; gunakan nomor halaman pada tabel di bawah untuk rujukan.

Ringkasan Bab

Bab penutup ini menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan beda hingga. Persamaan eliptik (Poisson) memakai skema lima titik yang menghasilkan sistem linear besar dan jarang. Persamaan parabolik (panas) dapat dihitung dengan skema maju eksplisit yang hanya stabil bersyarat, atau skema implisit seperti Backward-Euler dan Crank–Nicolson yang stabil tanpa syarat.

Persamaan hiperbolik (gelombang) menuntut rasio $\lambda = ck/h \leq 1$ untuk kestabilan skema eksplisit. Bab ditutup dengan pengantar metode elemen hingga yang memakai fungsi basis potongan-potongan pada segitiga.

Tujuan Pembelajaran

1. Menyusun skema lima titik untuk Poisson dan menyelesaikannya secara iteratif.
2. Menerapkan skema eksplisit dan Crank–Nicolson pada persamaan panas.
3. Menurunkan syarat kestabilan untuk persamaan gelombang.
4. Menjelaskan langkah dasar metode elemen hingga.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Peta Isi Bab

Seksi	Judul	Hal.	Definisi, teorema, algoritma di buku
12.1	Elliptic Partial Differential Equations	716	2 contoh
12.2	Parabolic Partial Differential Equations	725	3 contoh
12.3	Hyperbolic Partial Differential Equations	739	1 contoh
12.4	An Introduction to the Finite-Element Method	746	–
12.5	Survey of Methods and Software	760	–

Rumus dan Metode Kunci

Poisson: skema lima titik

$$\frac{w_{i+1,\,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,\,j}}{h^{\,2}} + \frac{w_{i,\,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,\,j-1}}{k^{\,2}} = f(x_i, y_j)$$

Panas: beda maju ($\lambda = \alpha^{\,2} k / h^{\,2}$)

$$w_{i,\,j+1} = (1 - 2\lambda) w_{ij} + \lambda\,(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}), \qquad \lambda \le \tfrac{1}{2}$$

Gelombang ($\lambda = ck/h$)

$$w_{i,\,j+1} = 2(1 - \lambda^{\,2}) w_{ij} + \lambda^{\,2}(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - w_{i,\,j-1}, \qquad \lambda \le 1$$

Web by: Steven Paulus Siahaan

12.1 Elliptic Partial Differential Equations

Rujukan buku: halaman 716

Persamaan diferensial parsial (PDP) elliptik yang menjadi contoh baku adalah persamaan Poisson pada persegi panjang $R = \{(x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

dengan nilai $u = g$ pada batas S dari R (syarat Dirichlet). Bila $f = 0$ persamaannya menjadi persamaan Laplace. Persamaan seperti ini menggambarkan keadaan setimbang, misalnya sebaran suhu tunak, potensial listrik, atau defleksi selaput. Tidak ada peubah waktu: nilai di satu titik ditentukan oleh nilai di seluruh sekitarnya sekaligus. Bila f dan g kontinu, solusinya ada dan tunggal.

Idenya adalah memperluas metode selisih hingga untuk masalah nilai batas satu dimensi ke dua dimensi. Pilih bilangan bulat n dan m, lalu $h = (b - a)/n$ dan $k = (d - c)/m$, dan buat titik kisi $x_i = a + ih$, $y_j = c + jk$. Di setiap titik dalam (x_i, y_j) turunan kedua dihampiri dengan selisih terpusat, yang diturunkan dari deret Taylor pada tiap peubah, masing-masing dengan galat pemotongan $O(h^2)$ dan $O(k^2)$. Bila w_{ij} menyatakan hampiran $u(x_i, y_j)$, maka persamaan Poisson menjadi

$$\frac{w_{i+1,\,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,\,j}}{h^2} + \frac{w_{i,\,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,\,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j)$$

untuk $i = 1, \ldots, n - 1$ dan $j = 1, \ldots, m - 1$. Setiap persamaan hanya melibatkan lima titik: titik pusat dan empat tetangganya (kiri, kanan, atas, bawah), sehingga disebut stensil lima titik. Galat pemotongan lokalnya $O(h^2 + k^2)$. Nilai w pada batas tidak menjadi bilangan tak diketahui: nilainya diambil dari g dan dipindahkan ke ruas kanan pada persamaan titik-titik yang bersebelahan dengan batas.

Hasilnya adalah sistem linear berukuran $(n - 1)(m - 1)$ dengan bilangan tak diketahui nilai w_{ij} di titik dalam. Agar sistem ini dapat ditulis sebagai $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$, titik-titik dalam perlu diberi nomor tunggal l, misalnya baris demi baris. Dengan penomoran seperti itu matriks A berpita (banded) dan jarang (sparse): tiap barisnya hanya memiliki paling banyak lima elemen taknol. Matriksnya juga simetrik, dominan diagonal secara lemah, dan definit positif, sehingga sistemnya punya solusi tunggal. Untuk kisi halus, A sangat besar, dan metode langsung untuk matriks berpita atau metode iteratif (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, atau gradien konjugat) lebih cocok daripada eliminasi Gauss penuh. Itu sebabnya seksi ini erat berkaitan dengan bab tentang metode iteratif untuk sistem linear.

Beberapa catatan praktis. Bila $h = k$, persamaan di tiap titik cukup sederhana: $4w_{ij} - w_{i+1,\,j} - w_{i-1,\,j} - w_{i,\,j+1} - w_{i,\,j-1} = -h^2 f(x_i, y_j)$, yaitu nilai di pusat sama dengan rata-rata keempat tetangga dikurangi suku sumber. Ini sejalan dengan sifat nilai rata-rata fungsi harmonik. Mengecilkan h menurunkan galat dengan laju kuadrat, tetapi ukuran sistem naik dengan laju kuadrat pula (dan dalam tiga dimensi kubik), jadi biaya komputasi membesar cepat. Metode ini mudah untuk daerah persegi panjang dengan syarat Dirichlet; untuk daerah tak beraturan atau syarat batas yang melibatkan turunan, perlu modifikasi, dan metode elemen hingga (seksi 12.4) sering lebih nyaman.

Konsep kunci

Persamaan Poisson dan Laplace — Persamaan elliptik $\nabla^2 u = f$; bila $f \equiv 0$ disebut persamaan Laplace. Solusinya menggambarkan keadaan setimbang tanpa peubah waktu.

Syarat Dirichlet — Nilai $u = g$ diberikan pada seluruh batas S. Bila f dan g kontinu, masalahnya punya solusi tunggal.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Kisi dan titik kisi — Persegi panjang dibagi menjadi $n \times m$ sel dengan lebar h dan k; titik potong garis kisi (x_i, y_j) disebut titik kisi.

Selisih terpusat orde dua — $\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$ menghampiri $u''(x)$ dengan galat $O(h^2)$; dipakai pada kedua arah.

Stensil lima titik — Persamaan di (x_i, y_j) hanya memuat w_{ij} dan empat tetangga terdekat, sehingga matriks sistemnya jarang.

Penomoran titik dalam — Titik dalam diberi satu indeks l (mis. baris demi baris) agar w_{ij} menjadi vektor tunggal; penomoran yang baik menghasilkan matriks berpita.

Galat pemotongan lokal — Metode ini berorde $O(h^2 + k^2)$. Untuk $h = k$ galatnya turun kira-kira empat kali lipat bila h dibagi dua.

Persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y)$$

Persamaan selisih hingga (stensil lima titik)

$$2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right] w_{ij} - (w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - \left(\frac{h}{k}\right)^2 (w_{i,\,j+1} + w_{i,\,j-1}) = -h^2 f(x_i, y_j)$$

Kasus $h = k$

$$4w_{ij} - w_{i+1,\,j} - w_{i-1,\,j} - w_{i,\,j+1} - w_{i,\,j-1} = -h^2 f(x_i, y_j)$$

Titik kisi dan syarat batas

$$x_i = a + ih, \quad y_j = c + jk; \qquad w_{0j} = g(x_0, y_j),\ w_{nj} = g(x_n, y_j),\ w_{i0} = g(x_i, y_0),\ w_{im} = g(x_i, y_m)$$

Galat pemotongan lokal

$$\tau_{ij} = O(h^2 + k^2)$$

Algoritma: Metode selisih hingga untuk persamaan Poisson (syarat Dirichlet)

1. Masukkan a, b, c, d, bilangan bulat $n, m \geq 2$, fungsi f dan g. Hitung $h = (b-a)/n$ dan $k = (d-c)/m$.
2. Hitung titik kisi $x_i = a + ih$ dan $y_j = c + jk$, lalu beri nomor tunggal l pada tiap titik dalam (x_i, y_j) dengan $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq m-1$.
3. Untuk setiap titik dalam, tulis persamaan stensil lima titik. Bila suatu tetangga berada di batas, ganti w-nya dengan nilai g di titik itu dan pindahkan ke ruas kanan.
4. Susun matriks A berukuran $(n-1)(m-1)$ dan vektor ruas kanan $\mathbf{b}$.
5. Selesaikan $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ dengan metode untuk matriks berpita atau metode iteratif (Gauss-Seidel, SOR, gradien konjugat).
6. Kembalikan $w_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ dengan memetakan balik indeks l ke (i, j).

Contoh 1: Persamaan Laplace pada persegi satuan

Selesaikan $\nabla^2 u = 0$ pada $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ dengan $u = 100$ pada sisi atas $y = 1$ dan $u = 0$ pada tiga sisi lainnya. Pakai $n = m = 3$ (jadi $h = k = \frac{1}{3}$).

Penyelesaian.

Titik dalam: $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2)$ dengan $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ dan seterusnya. Tulis $w_{11}, w_{21}, w_{12}, w_{22}$. Titik di baris atas ($j = 2$) bertetangga dengan batas atas bernilai 100. Persamaan $4w_{ij} - \cdots = 0$:

$$4w_{11} - w_{21} - w_{12} = 0, \qquad 4w_{21} - w_{11} - w_{22} = 0$$

$$4w_{12} - w_{22} - w_{11} = 100, \qquad 4w_{22} - w_{12} - w_{21} = 100$$

Karena simetri kiri-kanan, $w_{11} = w_{21} = A$ dan $w_{12} = w_{22} = B$. Persamaan pertama menjadi $3A - B = 0$ dan persamaan ketiga menjadi $3B - A = 100$. Dari yang pertama $B = 3A$, sehingga $9A - A = 100$, yaitu $A = 12{,}5$ dan $B = 37{,}5$.

Jadi $w_{11} = w_{21} = 12{,}5$ dan $w_{12} = w_{22} = 37{,}5$. Hasil ini masuk akal: nilainya naik mendekati sisi panas. Pemeriksaan di titik $(1, 1)$: tetangganya $w_{21} = 12{,}5$, $w_{12} = 37{,}5$, dan dua batas bernilai 0, sehingga rata-ratanya $\frac{12{,}5 + 37{,}5 + 0 + 0}{4} = 12{,}5 = w_{11}$.

Contoh 2: Persamaan Poisson dengan solusi eksak kuadrat

Selesaikan $\nabla^2 u = 4$ pada persegi satuan dengan $u = x^2 + y^2$ di batas, memakai $n = m = 3$. Bandingkan dengan solusi eksak $u = x^2 + y^2$.

Penyelesaian.

Dengan $h = k = \frac{1}{3}$ persamaannya $4w_{ij} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j} - w_{i,j+1} - w_{i,j-1} = -h^2 \cdot 4 = -\frac{4}{9}$. Nilai batas $g = x^2 + y^2$ dimasukkan pada tetangga batas. Misalnya untuk titik $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ tetangga batasnya $(0, \frac{1}{3})$ dan $(\frac{1}{3}, 0)$ bernilai $\frac{1}{9}$ masing-masing, sehingga

$$4w_{11} - w_{21} - w_{12} = -\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{2}{9}$$

Dengan menyelesaikan seluruh sistem 4×4 (dilakukan dengan komputer) diperoleh

$$w_{11} = 0{,}2222, \quad w_{21} = w_{12} = 0{,}5556, \quad w_{22} = 0{,}8889$$

yang sama dengan $u(x_i, y_j) = x_i^2 + y_j^2$: $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$. Hasilnya eksak karena galat pemotongan memuat turunan keempat u_{xxxx} dan u_{yyyy}, yang bernilai nol untuk polinom derajat dua. Ini dapat dipakai sebagai uji program.

Kesalahan umum

• Menganggap w di batas juga bilangan tak diketahui. Nilai batas diketahui dari g dan harus dipindahkan ke ruas kanan, bukan dimasukkan ke dalam matriks.

• Lupa mengalikan suku sumber dengan h^2 (atau $-h^2$) pada ruas kanan, atau salah tanda: persamaan $\nabla^2 u = f$ menghasilkan $-h^2 f$ bila diagonal dibuat positif.

• Memakai $h \neq k$ tetapi tetap menulis rumus untuk $h = k$; bobot tetangga arah y adalah $(h/k)^2$.

• Menyelesaikan sistem besar dengan eliminasi Gauss penuh, sehingga membuang sifat jarang dan berpita dari matriks. Memori dan waktunya menjadi tidak perlu besar.

• Salah memberi nomor titik sehingga matriks tidak berpita atau indeks batas tertukar.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa persamaan elliptik tidak punya peubah waktu, dan apa akibatnya bagi struktur sistem linear yang dihasilkan (bandingkan dengan metode maju untuk persamaan parabolik)?
2. Bila h dan k dibagi dua sekaligus, berapa kali lipat ukuran sistem dan berapa kali lipat penurunan galat pemotongan? Apa kesimpulan tentang biaya dan manfaat penghalusan kisi?
3. Mengapa nilai di tiap titik kisi untuk persamaan Laplace dengan $h = k$ sama dengan rata-rata empat tetangganya, dan apa kaitannya dengan prinsip maksimum?
4. Bagaimana Anda menangani batas yang tidak lurus atau syarat batas yang melibatkan turunan dengan metode ini? Mengapa elemen hingga lebih fleksibel?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Selesaikan $\nabla^2 u = 0$ pada persegi satuan dengan $u = x + y$ di batas, memakai $n = m = 2$ ($h = \frac{1}{2}$). Berapa w_{11}?

Kunci: Satu titik dalam $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. $4w_{11} = u(0, \frac{1}{2}) + u(1, \frac{1}{2}) + u(\frac{1}{2}, 0) + u(\frac{1}{2}, 1) = 0{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 1{,}5 = 4$, jadi $w_{11} = 1$, sama dengan $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$ (fungsi linear harmonik, hasil eksak).

2. Pada persegi satuan dengan $u = 0$ di batas, selesaikan $\nabla^2 u = -8$ memakai $n = m = 2$.

Kunci: $4w_{11} = -h^2 f = -\frac{1}{4} \cdot (-8) = 2$, sehingga $w_{11} = 0{,}5$.

3. Berapa banyak bilangan tak diketahui dan lebar pita maksimum (ordenya) bila $n = m = 11$ pada penomoran baris demi baris?

Kunci: Titik dalam $(n-1)(m-1) = 10 \times 10 = 100$ bilangan tak diketahui; tiap titik hanya terkait dengan tetangga selisih indeks ± 1 dan ± 10, sehingga lebar setengah pita 10 (pita total sekitar $2 \cdot 10 + 1 = 21$).

4. Untuk $h \neq k$, tuliskan persamaan stensil di (x_i, y_j) untuk $\nabla^2 u = 0$ dengan $h = 0{,}2$ dan $k = 0{,}1$.

Kunci: $(\frac{h}{k})^2 = 4$, jadi $2(4+1)w_{ij} - (w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - 4(w_{i,\,j+1} + w_{i,\,j-1}) = 0$, yaitu $10w_{ij} - w_{i+1,\,j} - w_{i-1,\,j} - 4w_{i,\,j+1} - 4w_{i,\,j-1} = 0$.

12.2 Parabolic Partial Differential Equations

Rujukan buku: halaman 725

PDP parabolik yang dibahas adalah persamaan panas (difusi) satu dimensi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < \ell,\ t > 0$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Konstanta $\alpha^2 > 0$ adalah koefisien difusi. Persamaan ini menggambarkan perambatan suhu pada batang, atau penyebaran suatu zat. Berbeda dengan kasus elliptik, di sini ada arah waktu: keadaan pada waktu berikutnya ditentukan oleh keadaan sekarang, dan metode numeriknya maju selapis waktu demi selapis waktu.

Kisi dibuat dengan ukuran langkah ruang $h = \ell/m$ dan langkah waktu $k > 0$, titik $x_i = ih$, $t_j = jk$. Turunan terhadap t dihampiri dengan selisih (maju atau mundur), turunan kedua terhadap x dengan selisih terpusat. Bilangan yang mengatur segalanya adalah

$$\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

Metode pertama adalah metode selisih maju (eksplisit). Dengan selisih maju pada waktu diperoleh

$$w_{i,\,j+1} = (1 - 2\lambda) w_{ij} + \lambda (w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j})$$

Nilai pada waktu t_{j+1} dihitung langsung dari lapisan t_j, tanpa menyelesaikan sistem. Galat pemotongannya $O(k + h^2)$. Harganya adalah kestabilan bersyarat: bila $\lambda \le \frac{1}{2}$ galat bulat tidak membesar dan metodenya stabil, tetapi bila $\lambda > \frac{1}{2}$ komponen frekuensi tinggi diperbesar pada tiap langkah sehingga hasilnya meledak. Syarat ini menuntut $k \le \frac{h^2}{2\alpha^2}$: mengecilkan h setengahnya memaksa k turun empat kali, sehingga jumlah langkah waktu naik kira-kira delapan kali lipat dengan jumlah titik ruang naik dua kali.

Metode kedua adalah metode selisih mundur (implisit): turunan t dihampiri dengan selisih mundur di titik (x_i, t_{j+1}),

$$(1 + 2\lambda) w_{i,\,j+1} - \lambda (w_{i+1,\,j+1} + w_{i-1,\,j+1}) = w_{ij}$$

Tiap langkah waktu menuntut penyelesaian sistem linear tridiagonal berukuran $(m-1)$, yang murah dengan eliminasi Gauss untuk matriks tridiagonal (biaya sebanding dengan m). Matriksnya dominan diagonal sehingga metodenya stabil tanpa syarat untuk semua $\lambda > 0$, sehingga k bisa dipilih sesuai kebutuhan ketelitian. Orde galatnya tetap $O(k + h^2)$.

Metode ketiga, Crank-Nicolson, merata-ratakan metode maju dan mundur, yaitu memakai selisih terpusat di titik tengah waktu $t_{j+1/2}$:

$$(1 + \lambda) w_{i,\,j+1} - \tfrac{\lambda}{2}(w_{i+1,\,j+1} + w_{i-1,\,j+1}) = (1 - \lambda) w_{ij} + \tfrac{\lambda}{2}(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j})$$

Metode ini juga implisit dengan sistem tridiagonal tiap langkah, stabil tanpa syarat, dan berorde $O(k^2 + h^2)$. Jadi untuk kerja per langkah yang hampir sama dengan metode mundur, orde waktunya naik dari satu ke dua. Karena itu Crank-Nicolson biasanya pilihan baku untuk persamaan panas satu dimensi. Satu catatan: bila data awal tidak mulus, Crank-Nicolson dapat menghasilkan osilasi kecil pada beberapa langkah pertama; metode mundur lebih meredam.

Ringkasnya: metode eksplisit mudah tetapi terikat syarat $\lambda \le \frac{1}{2}$; metode implisit membayar penyelesaian sistem tridiagonal untuk bebas dari syarat itu. Kestabilan dalam arti bebas dari pembesaran galat berbeda dari ketelitian: stabil tidak berarti teliti, karena k yang besar tetap memberi galat waktu yang besar. Pengertian konsistensi dan kestabilan ini nanti dipakai pada persamaan hiperbolik (seksi 12.3).

Web by: Steven Paulus Siahaan

Konsep kunci

Persamaan panas — $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ dengan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dan syarat batas pada $x = 0, \ell$; contoh PDP parabolik dengan arah waktu.

Bilangan λ — $\lambda = \alpha^2 k/h^2$ menggabungkan langkah waktu, langkah ruang, dan difusi; kestabilan metode eksplisit ditentukan olehnya.

Metode eksplisit (selisih maju) — Lapisan baru dihitung langsung dari lapisan lama. Murah per langkah, orde $O(k + h^2)$, stabil hanya jika $\lambda \le \frac{1}{2}$.

Metode implisit (selisih mundur) — Tiap langkah menyelesaikan sistem tridiagonal. Stabil untuk semua $\lambda > 0$, orde $O(k + h^2)$.

Metode Crank-Nicolson — Rata-rata dari metode maju dan mundur; implisit, stabil tanpa syarat, orde $O(k^2 + h^2)$.

Kestabilan bersyarat vs tanpa syarat — Metode stabil bersyarat hanya bekerja bila langkah memenuhi ketaksamaan tertentu; metode stabil tanpa syarat tidak memperbesar galat berapa pun k.

Sistem tridiagonal — Matriks metode implisit hanya memiliki elemen pada tiga diagonal, sehingga dapat diselesaikan dengan biaya sebanding banyaknya titik.

Persamaan panas

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Parameter λ

$$\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

Metode selisih maju (stabil bila $\lambda \le \frac{1}{2}$)

$$w_{i,j+1} = (1 - 2\lambda) w_{ij} + \lambda (w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

Metode selisih mundur

$$(1 + 2\lambda) w_{i,j+1} - \lambda (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}) = w_{ij}$$

Metode Crank-Nicolson

$$(1 + \lambda) w_{i,j+1} - \tfrac{\lambda}{2} (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}) = (1 - \lambda) w_{ij} + \tfrac{\lambda}{2} (w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$$

Algoritma: Metode Crank-Nicolson untuk persamaan panas

1. Masukkan ℓ, T, α^2, fungsi awal f, banyak subselang m dan langkah waktu k. Hitung $h = \ell/m$, $\lambda = \alpha^2 k/h^2$, dan banyak langkah $N = \lceil T/k \rceil$.
2. Inisialisasi $w_{i0} = f(x_i)$ untuk $i = 1, \ldots, m-1$, dan $w_{0j} = w_{mj} = 0$.
3. Bentuk matriks tridiagonal A berukuran $(m-1)$ dengan diagonal utama $1 + \lambda$ dan diagonal samping $-\frac{\lambda}{2}$ (faktorkan sekali saja).
4. Untuk $j = 0, 1, \ldots, N-1$: hitung ruas kanan $b_i = (1-\lambda) w_{ij} + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1,j} + w_{i-1,j})$ lalu selesaikan $A \mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{b}$.

5. Kembalikan $w_{ij} \approx u(x_i, t_j)$. Untuk metode eksplisit, ganti langkah 3 dan 4 dengan rumus selisih maju dan periksa $\lambda \le \frac{1}{2}$.

Contoh 1: Metode selisih maju untuk $u_t = u_{xx}$

Selesaikan $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = \sin \pi x$ dengan $h = 0{,}25$, $k = 0{,}025$ (jadi $\lambda = 0{,}4$) untuk empat langkah waktu. Bandingkan di $x = 0{,}5$ dengan solusi eksak $u = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$.

Penyelesaian.

Dengan $\lambda = 0{,}4$: $w_{i,\,j+1} = 0{,}2\, w_{ij} + 0{,}4(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j})$. Nilai awal di $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75$ adalah $0{,}70711;\ \ 1;\ \ 0{,}70711$.

Langkah 1 ($t = 0{,}025$): $w_2 = 0{,}2(1) + 0{,}4(0{,}70711 + 0{,}70711) = 0{,}76569$ dan $w_1 = 0{,}2(0{,}70711) + 0{,}4(0 + 1) = 0{,}54142$.

Langkah 2 ($t = 0{,}05$): $w_2 = 0{,}58627$, $w_1 = 0{,}41456$.

Langkah 3: $w_2 = 0{,}44890$, $w_1 = 0{,}31742$.

Langkah 4 ($t = 0{,}1$): $w_2 = 0{,}34372$, $w_1 = w_3 = 0{,}24304$.

Solusi eksak di $x = 0{,}5$, $t = 0{,}1$: $e^{-0{,}98696} = 0{,}37271$. Galat $\approx 0{,}029$. Galat ini wajar untuk $h = 0{,}25$ yang kasar (galat ruang $O(h^2)$ besar) dan makin kecil bila h dan k diperkecil dengan λ tetap.

Contoh 2: Perbandingan tiga metode untuk satu langkah, $\lambda = 0{,}8$

Masalah dan $h = 0{,}25$ sama seperti di atas, tetapi $k = 0{,}05$ ($\lambda = 0{,}8$). Hitung w di $x = 0{,}25$ pada $t = 0{,}05$ dengan metode maju, mundur, dan Crank-Nicolson, lalu bandingkan dengan eksak.

Penyelesaian.

Eksak: $e^{-\pi^2 \cdot 0{,}05} \sin \frac{\pi}{4} = 0{,}43169$.

Maju: $w = (1 - 1{,}6)(0{,}70711) + 0{,}8(0 + 1) = 0{,}37574$. Galat $0{,}056$.

Mundur: sistem 3×3 dengan diagonal $1 + 2\lambda = 2{,}6$ dan samping $-0{,}8$; simetri memberi $w_1 = w_3 = a$, $w_2 = b$ dengan $2{,}6a - 0{,}8b = 0{,}70711$ dan $2{,}6b - 1{,}6a = 1$. Diperoleh $a = 0{,}48147$, $b = 0{,}68091$. Galat $0{,}050$.

Crank-Nicolson: ruas kanan $b_1 = 0{,}2(0{,}70711) + 0{,}4(0 + 1) = 0{,}54142$ di titik 1 dan $b_2 = 0{,}2 + 0{,}4(1{,}41421) = 0{,}76569$ di titik 2; sistemnya diagonal $1{,}8$, samping $-0{,}4$: $1{,}8a - 0{,}4b = 0{,}54142$, $1{,}8b - 0{,}8a = 0{,}76569$. Diperoleh $a = 0{,}43864$, galat hanya $0{,}007$.

Untuk satu langkah dengan k yang cukup besar, Crank-Nicolson jauh lebih teliti. Catatan: dengan $\lambda = 0{,}8 > \frac{1}{2}$ metode maju tidak lagi terjamin stabil. Pada data mulus $\sin \pi x$ ketidakstabilan belum tampak, tetapi komponen frekuensi tertinggi pada kisi ini (faktor pembesar $1 - \lambda(2 + \sqrt{2}) \approx -1{,}73$) akan tumbuh bila terdapat galat bulat atau data kasar.

Kesalahan umum

• Menjalankan metode eksplisit dengan $\lambda > \frac{1}{2}$ karena hasil beberapa langkah pertama tampak baik. Ketidakstabilan baru tampak setelah komponen frekuensi tinggi tumbuh membesar.

• Mengira metode implisit pasti teliti karena stabil. Stabilitas hanya menjamin galat tidak meledak; galat $O(k)$ pada metode mundur tetap besar bila k besar.

• Mengubah h tanpa menyesuaikan k pada metode eksplisit, padahal $k \le \frac{h^2}{2\alpha^2}$ harus dipenuhi.

• Salah menulis ruas kanan Crank-Nicolson: ruas kanan memuat rata-rata lapisan lama j, dengan koefisien $1-\lambda$ (bukan $1-2\lambda$) dan $\frac{\lambda}{2}$.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa batas kestabilan metode eksplisit membuat biayanya naik sekitar delapan kali bila h dibagi dua? Bandingkan dengan biaya metode Crank-Nicolson pada ketelitian yang sama.
2. Dari sudut pandang fisika, mengapa metode implisit yang stabil tanpa syarat wajar untuk persamaan difusi?
3. Apa yang terjadi pada metode Crank-Nicolson bila data awal tidak mulus? Mengapa metode mundur dapat lebih disukai pada kasus itu?
4. Mengapa matriks metode mundur dan Crank-Nicolson dapat difaktorkan sekali saja untuk semua langkah waktu?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $u_t = 2u_{xx}$ dengan $h = 0{,}1$, berapa k terbesar agar metode selisih maju stabil?

Kunci: $\lambda = \frac{2k}{0{,}01} \le \frac{1}{2}$, jadi $k \le 0{,}0025$.

2. Dengan $\alpha^2 = 1$, $h = 0{,}5$ ($\ell = 1$), $k = 0{,}125$, dan $f(x) = \sin \pi x$, hitung w di $x = 0{,}5$ setelah satu langkah maju.

Kunci: $\lambda = 0{,}5$, $w_1 = (1-1)\cdot 1 + 0{,}5(0+0) = 0$. Hasil ini jauh dari eksak ($e^{-\pi^2/8} \approx 0{,}29$) karena kisi terlalu kasar; hanya satu titik dalam.

3. Tunjukkan bahwa pada $\lambda = \frac{1}{2}$ metode maju menjadi $w_{i,\,j+1} = \frac{1}{2}(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j})$.

Kunci: Koefisien $1 - 2\lambda = 0$ sehingga suku w_{ij} hilang, sisanya $\lambda = \frac{1}{2}$ untuk kedua tetangga.

4. Mengapa pada $\lambda = 0{,}8$ faktor $1 - \lambda(2 + \sqrt{2})$ menunjukkan ketidakstabilan metode maju untuk $m = 4$?

Kunci: $1 - 0{,}8 \cdot 3{,}4142 = -1{,}7314$, bernilai mutlak > 1, sehingga komponen frekuensi tertinggi dikalikan dengan faktor yang besarnya > 1 tiap langkah dan tumbuh bergantian tanda.

12.3 Hyperbolic Partial Differential Equations

Rujukan buku: halaman 739

PDP hiperbolik yang dibahas adalah persamaan gelombang satu dimensi, yang menggambarkan getaran senar atau perambatan bunyi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad 0 < x < \ell,\ t > 0$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ dan dua syarat awal: simpangan awal $u(x,0) = f(x)$ dan kecepatan awal $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$. Dua syarat awal diperlukan karena persamaannya berorde dua terhadap t. Konstanta α adalah kecepatan rambat gelombang. Berbeda dari persamaan panas, gelombang tidak meredam kekasaran: bentuk awal merambat dengan kecepatan hingga α dan, tanpa redaman, energinya tetap.

Kisi memakai $h = \ell/m$ dan langkah waktu k, titik $x_i = ih$, $t_j = jk$. Turunan kedua terhadap t dan x keduanya dihampiri dengan selisih terpusat. Dengan $\lambda = \frac{\alpha k}{h}$ (bilangan Courant) diperoleh persamaan selisih

$$w_{i,\,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - w_{i,\,j-1}$$

yang eksplisit: nilai pada waktu t_{j+1} dihitung dari dua lapisan sebelumnya t_j dan t_{j-1}. Galat pemotongan lokalnya $O(h^2 + k^2)$.

Karena rumus memerlukan dua lapisan waktu, langkah pertama harus diperoleh dengan cara khusus. Lapisan $j = 0$ berasal dari f: $w_{i0} = f(x_i)$. Untuk lapisan $j = 1$, deret Taylor $u(x_i,k) = u(x_i,0) + k\,u_t(x_i,0) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i,0) + \cdots$ dan persamaan $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} = \alpha^2 f''$ memberikan, setelah f'' dihampiri dengan selisih terpusat,

$$w_{i1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \tfrac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + k\,g(x_i)$$

Lalu rumus utama dipakai untuk $j = 1, 2, \ldots$. Suku $\frac{k^2}{2}u_{tt}$ penting dipertahankan: bila hanya memakai $u(x_i,0) + k\,g(x_i)$, galat di lapisan pertama berorde $O(k^2)$ (bukan $O(k^3)$), sehingga ketelitian orde dua skema keseluruhan dapat hilang.

Syarat kestabilan: metode stabil bila $\lambda \le 1$, yakni $k \le \frac{h}{\alpha}$ (syarat Courant-Friedrichs-Lewy, CFL). Maknanya: nilai $w_{i,\,j+1}$ bergantung pada titik x_{i-1}, x_i, x_{i+1} di lapisan j, jadi dalam satu langkah informasi paling jauh merambat sejauh h. Gelombang fisik merambat sejauh αk dalam waktu k. Bila $\alpha k > h$, gelombang sebenarnya merambat lebih jauh daripada yang dapat "dilihat" skema, dan skema gagal mengikuti sifat PDP; hasilnya tak stabil. Pada $\lambda = 1$ dan α konstan, skema bahkan tepat untuk persamaan dalam kasus tertentu.

Dibandingkan metode untuk persamaan panas, metode ini eksplisit tetapi ordenya dua baik di ruang maupun waktu, dan kestabilannya hanya mensyaratkan $k = O(h)$ (bukan $O(h^2)$). Ia tidak meredam: galat berupa kesalahan fase (dispersi), bukan peredaman, sehingga pada waktu panjang gelombang numerik bisa tertinggal atau mendahului. Untuk persamaan hiperbolik yang lebih umum atau dimensi lebih tinggi, orang memakai skema yang lebih rumit, tetapi konsep CFL tetap menjadi pedoman dasar.

Konsep kunci

Persamaan gelombang — $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, contoh PDP hiperbolik; butuh syarat awal untuk u dan u_t.

Kecepatan rambat α — Gelombang merambat dengan kecepatan α tanpa meredam; ini menentukan syarat kestabilan numerik.

Bilangan Courant λ — $\lambda = \alpha k/h$; skema eksplisit stabil bila $\lambda \le 1$.

Web by: Steven Paulus Siahaan

Skema tiga lapisan waktu — $w_{i,\,j+1}$ memerlukan w_{ij} dan $w_{i,\,j-1}$, sehingga langkah pertama harus dihitung dengan rumus khusus dari syarat awal.

Syarat CFL — Daerah ketergantungan numerik harus memuat daerah ketergantungan fisik: $\alpha k \le h$.

Dispersi numerik — Galat pada skema ini umumnya berupa pergeseran fase gelombang, bukan peredaman; muncul pada waktu panjang.

Persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Skema selisih terpusat

$$w_{i,\,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - w_{i,\,j-1}, \quad \lambda = \frac{\alpha k}{h}$$

Langkah pertama

$$w_{i1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \tfrac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + k\,g(x_i)$$

Syarat kestabilan

$$\lambda = \frac{\alpha k}{h} \le 1$$

Galat pemotongan

$$\tau_{ij} = O(h^2 + k^2)$$

Algoritma: Metode selisih hingga untuk persamaan gelombang

1. Masukkan ℓ, T, α, fungsi f, g, m dan k. Hitung $h = \ell/m$ dan $\lambda = \alpha k/h$; pastikan $\lambda \le 1$.
2. Set $w_{i0} = f(x_i)$, serta $w_{0j} = w_{mj} = 0$ untuk semua j.
3. Hitung lapisan pertama: $w_{i1} = (1-\lambda^2)f(x_i) + \tfrac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + k\,g(x_i)$ untuk $i = 1,\,\ldots,\,m-1$.
4. Untuk $j = 1, 2,\,\ldots$ hitung $w_{i,\,j+1} = 2(1-\lambda^2)w_{ij} + \lambda^2(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - w_{i,\,j-1}$ untuk $i = 1,\,\ldots,\,m-1$.
5. Berhenti bila $t_j \ge T$ dan kembalikan $w_{ij} \approx u(x_i, t_j)$.

Contoh 1: Senar dengan simpangan awal $\sin \pi x$

Selesaikan $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$ dengan $h = 0{,}25$, $k = 0{,}2$ (jadi $\lambda = 0{,}8$) untuk empat langkah. Bandingkan di $x = 0{,}5$ dengan eksak $u = \cos \pi t \sin \pi x$.

Penyelesaian.

Nilai awal di $x = 0{,}25;\, 0{,}5;\, 0{,}75$: $0{,}70711;\;\; 1;\;\; 0{,}70711$, dan $\lambda^2 = 0{,}64$.

Langkah pertama ($g=0$): $w_{i1} = 0{,}36 f_i + 0{,}32(f_{i+1} + f_{i-1})$. Di $x=0{,}25$: $0{,}36(0{,}70711) + 0{,}32(1+0) = 0{,}57456$. Di $x=0{,}5$: $0{,}36 + 0{,}32(1{,}41421) = 0{,}81255$.

Rumus utama: $w_{i,\,j+1} = 0{,}72\, w_{ij} + 0{,}64(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - w_{i,\,j-1}$. Di $x=0{,}5$ ($w_{i\pm1}$ sama): $w_2 = 0{,}72(0{,}81255) + 0{,}64(1{,}14912) - 1 = 0{,}32047$; seterusnya $-0{,}29175$ dan $-0{,}79460$.

Perbandingan di $x=0{,}5$:

$$t=0{,}2:\ 0{,}81255 \text{ vs } 0{,}80902; \quad t=0{,}4:\ 0{,}32047 \text{ vs } 0{,}30902$$

$$t=0{,}6:\ -0{,}29175 \text{ vs } -0{,}30902; \quad t=0{,}8:\ -0{,}79460 \text{ vs } -0{,}80902$$

Galat $\approx 0{,}004$ sampai $0{,}017$; bentuk gelombang cos terlihat dengan baik.

Contoh 2: Memeriksa syarat CFL

Untuk $\alpha = 3$ dan $h = 0{,}05$, tentukan k terbesar agar skema stabil dan hitung koefisien $2(1-\lambda^2)$ bila $k = 0{,}01$.

Penyelesaian.

Syarat $\lambda = \frac{3k}{0{,}05} \le 1$ memberi $k \le \frac{0{,}05}{3} \approx 0{,}01667$.

Untuk $k=0{,}01$: $\lambda = \frac{0{,}03}{0{,}05} = 0{,}6$, $\lambda^2 = 0{,}36$, sehingga $2(1-\lambda^2) = 1{,}28$ dan koefisien tetangga $0{,}36$. Skemanya $w_{i,\,j+1} = 1{,}28\, w_{ij} + 0{,}36(w_{i+1,\,j} + w_{i-1,\,j}) - w_{i,\,j-1}$, dan jumlah koefisien (untuk fungsi konstan) memberi $1{,}28 + 0{,}72 - 1 = 1$ yang konsisten.

Kesalahan umum

• Menerapkan rumus utama pada $j=0$ tanpa rumus khusus untuk lapisan pertama; $w_{i,\,-1}$ tidak ada. Menggunakan $w_{i1} = w_{i0}$ (mengabaikan kecepatan awal) memberi galat besar.

• Memakai $\lambda > 1$ (mis. memperbesar k agar cepat), yang menyebabkan skema tak stabil.

• Mencampur syarat stabil $\lambda \le \frac{1}{2}$ dari persamaan panas dengan $\lambda \le 1$ untuk persamaan gelombang; λ didefinisikan berbeda ($\alpha k/h$ vs $\alpha^2 k/h^2$).

• Lupa suku $k\,g(x_i)$ pada langkah pertama saat kecepatan awal tidak nol.

Pertanyaan diskusi

1. Jelaskan syarat CFL secara fisis: mengapa skema tidak mungkin akurat bila gelombang sebenarnya merambat lebih jauh dari jangkauan stensil dalam satu langkah waktu?
2. Mengapa persamaan panas membutuhkan satu syarat awal sedangkan persamaan gelombang membutuhkan dua?
3. Dibandingkan metode eksplisit untuk persamaan panas, batas kestabilan persamaan gelombang jauh lebih longgar ($k = O(h)$). Apa penyebabnya?
4. Apa yang dimaksud dispersi numerik dan bagaimana ia memengaruhi hasil untuk waktu simulasi yang panjang?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Untuk $\alpha = 2$, $h = 0{,}1$, berapa k terbesar yang menjamin stabil?

Kunci: $\lambda = \frac{2k}{0{,}1} \le 1 \Rightarrow k \le 0{,}05$.

2. Dengan $\lambda = 1$, tuliskan skema dan sederhanakan.

Kunci: $w_{i,j+1} = w_{i+1,j} + w_{i-1,j} - w_{i,j-1}$ (suku w_{ij} hilang karena $1 - \lambda^2 = 0$).

3. Untuk $f(x) = \sin \pi x$, $g = 0$, $\alpha = 1$, $h = 0{,}5$, $k = 0{,}25$ ($\ell = 1$), hitung $w_{1,1}$ di $x = 0{,}5$.

Kunci: $\lambda = 0{,}5$, $\lambda^2 = 0{,}25$: $w_{11} = 0{,}75(1) + 0{,}125(0 + 0) = 0{,}75$.

4. Bagaimana menentukan w_{i1} bila $g(x) = x(1 - x)$ dan $f = 0$, memakai $k = 0{,}1$ di $x_i = 0{,}5$?

Kunci: $w_{i1} = k\, g(x_i) = 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}025$, karena semua suku yang memuat f bernilai nol.

Web by: Steven Paulus Siahaan

12.4 An Introduction to the Finite-Element Method

Rujukan buku: halaman 746

Metode elemen hingga (MEH) memperluas gagasan Rayleigh-Ritz untuk masalah nilai batas satu dimensi ke PDP pada daerah bidang. Persamaan yang dibahas berbentuk

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\big)+\frac{\partial}{\partial y}\big(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\big)+r(x,y)u=f(x,y)$$

pada daerah D dengan batas S. Pada bagian S_1 dari batas diberikan syarat Dirichlet $u=g$, dan pada sisanya S_2 diberikan syarat yang melibatkan turunan normal, $p\,u_x\cos\theta_1+q\,u_y\cos\theta_2+g_1u=g_2$, dengan θ_1,θ_2 sudut arah normal luar. Keunggulan MEH atas selisih hingga adalah penanganan batas: syarat jenis kedua masuk secara alami sebagai integral batas dalam fungsional, dan daerah yang tak beraturan cukup dibagi menjadi segitiga.

Dasar teorinya adalah prinsip variasi. Bila $p,q>0$, $r\le 0$, $g_1>0$ dan koefisien cukup mulus, maka solusi persamaan tersebut adalah satu-satunya fungsi yang meminimumkan fungsional

$$I[w]=\iint_D\Big\{\tfrac12\Big[p\big(\tfrac{\partial w}{\partial x}\big)^2+q\big(\tfrac{\partial w}{\partial y}\big)^2-r\,w^2\Big]+f\,w\Big\}dx\,dy+\int_{S_2}\big\{-g_2w+\tfrac12 g_1w^2\big\}dS$$

di antara fungsi w yang cukup mulus dan memenuhi $w=g$ pada S_1. MEH meminimumkan I bukan pada seluruh kelas fungsi tersebut, melainkan pada ruang berdimensi hingga yang terdiri dari fungsi polinom sepotong-sepotong.

Langkah pertama: bagi D menjadi elemen berbentuk segitiga (atau persegi panjang). Titik sudut elemen disebut simpul. Pada tiap segitiga dipakai fungsi linear $\phi(x,y)=a+bx+cy$ (untuk persegi panjang, bilinear $a+bx+cy+dxy$). Fungsi basis ϕ_i dipilih sehingga bernilai 1 di simpul ke-i dan 0 di simpul lain, dan linear pada tiap segitiga; jadi ϕ_i hanya taknol pada segitiga-segitiga yang berbagi simpul i (dukungan lokal). Hampiran dicari dalam bentuk

$$\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{M}\gamma_i\phi_i(x,y)$$

Konstanta γ_i untuk simpul pada S_1 ditetapkan oleh syarat batas g (nilai g di simpul), sedangkan sisanya, untuk simpul-simpul lain, diperoleh dari syarat $\frac{\partial I}{\partial\gamma_i}=0$. Substitusi hampiran ke I dan turunan terhadap tiap γ_i menghasilkan sistem linear $A\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{b}$ dengan

$$A_{ij}=\iint_D\Big[p\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+q\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}-r\phi_i\phi_j\Big]dx\,dy+\int_{S_2}g_1\phi_i\phi_j\,dS$$

dan $b_i=-\iint_D f\phi_i\,dx\,dy+\int_{S_2}g_2\phi_i\,dS$, dikurangi sumbangan dari simpul-simpul yang nilainya sudah diketahui. Karena dukungan ϕ_i lokal, $A_{ij}=0$ bila simpul i dan j tidak berbagi sisi segitiga; jadi A jarang. Matriks A simetrik dan (dengan syarat di atas) definit positif.

Dalam praktik, A dirakit per elemen: untuk tiap segitiga dihitung matriks kekakuan elemen berukuran 3×3 (integral hasil kali gradien fungsi basis lokal pada segitiga itu) dan vektor beban elemen, lalu sumbangannya dijumlahkan ke posisi simpul global yang bersesuaian. Untuk fungsi linear $\phi_i=a_i+b_ix+c_iy$ gradiennya konstan pada segitiga, sehingga bila $p=q=1$ dan $r=0$, matriks kekakuan elemen adalah $K_{ij}=\Delta(b_ib_j+c_ic_j)$ dengan Δ luas segitiga. Integral beban biasanya dihampiri dengan $\iint f\phi_i\approx f(\text{pusat})\cdot\frac{\Delta}{3}$. Perakitan elemen demi elemen inilah yang membuat metode mudah diprogram dan dikerjakan untuk geometri yang rumit.

Kelebihan MEH: geometri sembarang, syarat batas alami, mudah memperhalus kisi secara lokal (pada daerah dengan perubahan besar), dan dasar matematika yang kuat lewat prinsip variasi, sehingga galat dapat dianalisis dalam norma energi. Kekurangannya: pemrograman

Web by: Steven Paulus Siahaan

lebih rumit daripada selisih hingga, dan sistem tetap besar untuk kisi halus, sehingga perlu penyelesai berpita atau iteratif. Hubungan dengan seksi lain: MEH adalah versi dua dimensi metode Rayleigh-Ritz seksi 11.5 dengan fungsi basis linear sepotong-sepotong (topi), dan sistemnya serupa dengan sistem dari stensil lima titik pada seksi 12.1.

Konsep kunci

Prinsip variasi — Solusi PDP elliptik di atas adalah peminimum tunggal fungsional $I[w]$; masalah PDP diganti dengan masalah minimisasi.

Elemen dan simpul — Daerah dibagi menjadi segitiga (atau persegi panjang); titik sudutnya disebut simpul.

Fungsi basis sepotong-sepotong — ϕ_i linear pada tiap segitiga, bernilai 1 di simpul i dan 0 di simpul lain; kontinu tetapi turunannya terputus di sisi antarelemen.

Dukungan lokal — ϕ_i hanya taknol pada segitiga yang memuat simpul i, sehingga matriks A jarang, simetrik, dan definit positif.

Syarat batas esensial dan alami — Syarat $u = g$ pada S_1 dipasang langsung pada koefisien; syarat turunan pada S_2 muncul otomatis sebagai integral batas dalam I.

Matriks kekakuan dan vektor beban — A dan $\mathbf{b}$ dirakit dari sumbangan tiap elemen; istilah berasal dari mekanika struktur.

Matriks kekakuan elemen segitiga — Untuk $p = q = 1$, $r = 0$: $K_{ij} = \Delta(b_i b_j + c_i c_j)$ dengan Δ luas dan $\phi_i = a_i + b_i x + c_i y$.

PDP elliptik umum

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\big(p\tfrac{\partial u}{\partial x}\big) + \tfrac{\partial}{\partial y}\big(q\tfrac{\partial u}{\partial y}\big) + r\,u = f$$

Fungsional yang diminimumkan

$$I[w] = \iint_D \Big\{\tfrac{1}{2}\big[p\,w_x^2 + q\,w_y^2 - r\,w^2\big] + f\,w\Big\}dx\,dy + \int_{S_2}\big\{-g_2 w + \tfrac{1}{2}g_1 w^2\big\}dS$$

Hampiran elemen hingga

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i \phi_i(x,y)$$

Fungsi basis linear pada segitiga

$$\phi_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y, \qquad \phi_i(\text{simpul } j) = \delta_{ij}$$

Kekakuan elemen ($p = q = 1$, $r = 0$)

$$K_{ij}^{e} = \Delta\,(b_i b_j + c_i c_j)$$

Sistem linear

$$A\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b}, \qquad \tfrac{\partial I}{\partial \gamma_i} = 0$$

Algoritma: Metode elemen hingga dengan segitiga linear

1. Bagi D menjadi segitiga; beri nomor simpul dan data tiap segitiga (tiga nomor simpul). Tandai simpul pada S_1 (nilai g diketahui).
2. Untuk tiap segitiga: tentukan fungsi basis lokal $\phi = a + bx + cy$ dengan menyelesaikan sistem 3×3 (nilai 1 di satu simpul, 0 di dua lainnya); hitung luas Δ.
3. Hitung matriks kekakuan elemen $K_{ij} = \iint [p\,\phi_{ix}\phi_{jx} + q\,\phi_{iy}\phi_{jy} - r\phi_i\phi_j]dx\,dy$ dan vektor beban elemen $-\iint f\phi_i\,dx\,dy$; tambahkan integral batas untuk sisi yang terletak pada S_2.
4. Rakit A dan $\mathbf{b}$: jumlahkan sumbangan elemen ke posisi simpul global; pindahkan sumbangan simpul berstatus diketahui ke ruas kanan.
5. Selesaikan $A\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b}$ untuk γ_i di simpul bebas; tetapkan $\gamma_i = g(\text{simpul})$ di simpul pada S_1.
6. Hampiran di titik sembarang: $\phi(x, y) = \sum \gamma_i \phi_i(x, y)$ (hanya tiga suku taknol di tiap segitiga).

Contoh 1: Fungsi basis dan kekakuan satu segitiga

Segitiga memiliki simpul $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (0, 1)$. Tentukan fungsi basis linear ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 dan matriks kekakuan elemen untuk $p = q = 1$, $r = 0$.

Penyelesaian.

Luas $\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Cari $\phi_i = a_i + b_i x + c_i y$ dengan nilai 1 di simpul ke-i dan 0 di dua simpul lain.

ϕ_1: bernilai 1 di $(0, 0)$ dan 0 di $(2, 0), (0, 1)$, jadi $\phi_1 = 1 - \frac{x}{2} - y$, sehingga $(b_1, c_1) = (-\frac{1}{2},\ -1)$.

$\phi_2 = \frac{x}{2}$, $(b_2, c_2) = (\frac{1}{2}, 0)$.

$\phi_3 = y$, $(b_3, c_3) = (0, 1)$.

Periksa: $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1$. Matriks kekakuan $K_{ij} = \Delta(b_i b_j + c_i c_j)$:

$$K_{11} = \tfrac{1}{4} + 1 = 1{,}25, \quad K_{12} = -\tfrac{1}{4}, \quad K_{13} = -1$$

$$K_{22} = \tfrac{1}{4}, \quad K_{23} = 0, \quad K_{33} = 1$$

Jumlah tiap baris sama dengan nol (karena fungsi konstan tidak berenergi): $1{,}25 - 0{,}25 - 1 = 0$, $-0{,}25 + 0{,}25 + 0 = 0$, $-1 + 0 + 1 = 0$.

Contoh 2: Persamaan Poisson pada persegi satuan dengan satu simpul bebas

Selesaikan $\nabla^2 u = -1$ pada $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ dengan $u = 0$ di batas, memakai MEH dengan segitiga linear. Daerah dibagi menjadi 4 persegi berukuran $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, masing-masing dipecah menjadi 2 segitiga oleh sebuah diagonal (8 segitiga, 9 simpul). Hitung hampiran di pusat.

Penyelesaian.

Dengan $p = q = 1$, $r = 0$, $f = -1$, fungsionalnya $I[w] = \iint \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - w\right) dx\,dy$. Hanya simpul pusat $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ yang bebas, sedangkan 8 simpul lain berada di batas ($\gamma = 0$). Jadi hampiran adalah $\gamma\phi_c$ dan sistemnya hanya satu persamaan $A_{cc}\gamma = b_c$.

Kekakuan $A_{cc} = \iint |\nabla \phi_c|^2 dx\, dy$. Simpul pusat menjadi sudut dari 6 segitiga (dua persegi yang diagonalnya melalui pusat menyumbang dua segitiga, dua persegi lainnya satu segitiga), masing-masing berluas $\frac{1}{8}$. Menjumlahkan kekakuan elemen K_{ii} untuk simpul pusat dari keenam segitiga itu menghasilkan $A_{cc} = 4$ (nilai ini dikonfirmasi dengan perakitan numerik).

Beban: $b_c = -\iint f\phi_c\, dx\, dy = \iint \phi_c\, dx\, dy$. Integral fungsi topi ϕ_c sama dengan tinggi $\times$ luas dukungan $/3 = \frac{1}{3}\cdot$ (jumlah luas segitiga yang memuat pusat). Luas total dukungan $= 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, sehingga $b_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Jadi $\gamma = \frac{b_c}{A_{cc}} = \frac{1/4}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

Bandingkan solusi eksak di pusat, kira-kira $0{,}0737$. Galat $\approx 15\%$ wajar untuk hanya satu simpul bebas, dan akan mengecil bila kisi diperhalus. (Menarik: hasil selisih hingga pada seksi 12.1 dengan $h = \frac{1}{2}$ memberi $w = \frac{h^2}{4} = 0{,}0625$, sama persis.)

Kesalahan umum

• Mengira fungsi basis ϕ_i taknol pada seluruh daerah. Fungsi topi hanya taknol pada segitiga yang memuat simpul i; jika tidak, matriks tidak jarang.

• Memperlakukan syarat batas Dirichlet sebagai bilangan tak diketahui. Koefisien γ_i di simpul pada S_1 diketahui dan dipindahkan ke ruas kanan, bukan diselesaikan.

• Salah tanda pada vektor beban: untuk $I[w]$ dengan $+f\,w$, persamaan yang dihasilkan memiliki $b_i = -\iint f\phi_i$.

• Memakai segitiga yang sangat tipis (sudut sangat kecil); ketelitian dan kondisi matriks memburuk. Segitiga sebaiknya mendekati sama sisi.

Pertanyaan diskusi

1. Mengapa MEH dapat menangani batas melengkung atau syarat batas turunan lebih mudah daripada selisih hingga?
2. Apa peran prinsip variasi (fungsional I) dalam MEH, dan apa bedanya dengan hanya mendiskritkan persamaan?
3. Mengapa matriks kekakuan simetrik, jarang, dan definit positif? Apa akibatnya untuk pemilihan penyelesai sistem linear?
4. Bagaimana memperhalus elemen pada bagian daerah yang solusinya berubah cepat tanpa memperhalus seluruh daerah?

Latihan mandiri (soal buatan sendiri, dengan kunci)

1. Segitiga $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (1,1)$. Tentukan fungsi basis dan matriks kekakuan ($p = q = 1$, $r = 0$).

Kunci: $\Delta = \frac{1}{2}$; $\phi_1 = 1 - x$, $\phi_2 = x - y$, $\phi_3 = y$. Dengan $(b_i, c_i) = (-1,0), (1,-1), (0,1)$ dan $K_{ij} = \frac{1}{2}(b_i b_j + c_i c_j)$: $K_{11} = \frac{1}{2}$, $K_{12} = -\frac{1}{2}$, $K_{13} = 0$, $K_{22} = 1$, $K_{23} = -\frac{1}{2}$, $K_{33} = \frac{1}{2}$.

2. Mengapa jumlah tiap baris matriks kekakuan elemen untuk $r = 0$ sama dengan nol?

Kunci: Karena $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \equiv 1$ sehingga $\sum_j \nabla\phi_j = 0$ dan $\sum_j K_{ij} = \iint \nabla\phi_i \cdot \sum_j \nabla\phi_j = 0$.

3. Pada contoh persegi satuan 2x2 dengan segitiga, ganti $f = -1$ dengan $f = -4$. Berapa hampiran di pusat?

Kunci: Beban membesar empat kali: $b_c = 1$, $A_{cc} = 4$, jadi $\gamma = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

4. Berapa luas dukungan fungsi topi pada simpul dalam bila simpul dikelilingi enam segitiga kongruen berluas Δ, dan berapa $\iint \phi_i \, dx \, dy$?

Kunci: Luas dukungan 6Δ; integral fungsi topi $= \frac{1}{3} \cdot 6\Delta = 2\Delta$.

Pesan Utama

Ingat

Pada PDE, pemilihan skema (eksplisit vs implisit) adalah pertukaran antara biaya per langkah dan batas kestabilan.

Langkah Belajar Berikutnya

1. Baca ulang tiap seksi di buku menurut halaman pada Peta Isi Bab, lalu kerjakan contoh secara manual.
2. Kerjakan soal Exercise Set tiap seksi, mulai dari soal bernomor ganjil (jawaban ada di bagian akhir buku).
3. Implementasikan satu metode dari bab ini (Python/MATLAB) dan bandingkan hasilnya dengan hitungan tangan.

Sumber: Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, Edisi ke-9, Cengage Learning, 2010.
Dibuat otomatis 07-11-2026.

Web by: Steven Paulus Siahaan